ORSAY
n° d'ordre :

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR 3e Cycle

Spécialité : PHYSIQUE THEORIQUE

PAR

Yves DUPONT

SUJET : VIOLATION DE CP DANS LE MODELE DE WEINBERG ET DUREE DE VIE DU PROTON.

soutenue le 14 Février 1983 devant la Commission d'examen

MM. Ph. MEYER Président

V. ALESSANDRINI

M. DAVIER

T.N. PHAM

T.N. TRUONG

UNIV.
LIBRARY
LEIDEN

REMERCIEMENTS

Je remercie vivement Monsieur le Professeur P. Meyer d'avoir accepté de présider mon Jury de Thèse.

Je remercie également les professeurs V. Alessandrini et M. Davier d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie Monsieur Jean Lascoux de m'avoir accueilli au Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique.

Les articles présentés ont été réalisés avec T. N. Pham ou T.N. Truong. Qu'ils soient vivement remerciés pour leur disponibilité permanente et les innombrables conseils prodigués tout au long de cette initiation à la recherche.

Ce travail n'aurait pu être réalisé sans le concours du secrétariat et plus particulièrement de Madame Amozig à qui est revenu le difficile travail de déchiffrage du manuscrit et de sa frappe, ainsi que de D. Concha pour la reproduction.

SOMMAIRE

- Introduction.

I - Résultats expérimentaux et phénoménologie.

II - Modèles théoriques.

A) Modèle de Kobayoshi Maskawa.

B) Modèle de Weinberg.

III - Lagrangiens effectifs.

A) Opérateurs à quatre quarks $\Delta s = 2$

B) Transition $\Delta s = 1$

C) Lagrangiens Phénoménologiques.

IV - Calcul des amplitudes et de ε'/ε

A) Calcul par l'insertion du vide.

B) Calcul de ε'/ε

V - Contributions dispersives aux transitions $\Delta s = 2$

VI - Analyse phénoménologique de la contribution du Pingouin.

VII - Autres phénomènes où se manifeste la violation de CP. Conclusion.

VIII - Théorie grand unifiée et durée de vie du proton.

INTRODUCTION

Dans l'étude de la physique des particules, les symétries observées permettent de classer les particules et leurs interactions dans le cas des symétries de jauge. Parmi ces symétries, il en est des discrètes, l'inversion d'espace ou parité P, la conjugaison de charge C et le renversement du temps T. Les interactions faibles violent la parité P et C contrairement aux interactions électromagnétiques et fortes. D'autre part, cette violation peut être introduite dans un modèle basé sur une théorie de jauge. Pendant un temps on a cru que la parité CP était conservée par toutes les interactions. En 1964, on a constaté en étudiant les désintégrations des K-neutres que les interactions faibles violent CP très faiblement. Il fallait alors incorporer cette violation dans les modèles théoriques, ce qui est plus difficile que pour le cas de P et C. Une autre alternative était d'introduire une nouvelle interaction super faible violant CP. Avec la découverte des générations de quarks lourds, Kobayashi et Maskawa proposèrent un modèle de violation CP s'intégrant aux interactions faibles. Peu après, avec le développement des théories de jauge, Weinberg proposa un modèle de violation spontanée de CP qui est une extension du modèle standard de Weinberg et Salam dans le cas où il existe 3 doublets de Higgs. Nous nous proposons d'étudier les conséquences de ce modèle en les comparant aux prédictions du modèle de Kobayashi et Maskawa.

L'organisation du travail est la suivante.

Après une rapide revue des données expérimentales et de la phénoménologie du système $K_o - \overline{K}_o$ (Chapitre I) les modèles sont présentés dans

le chapitre II. Les modèles proposés induisent des vertex entre quarks et champs de jauge. Pour étudier les éléments de matrice, il convient d'introduire des lagrangiens effectifs, ne contenant que des quarks. Ces lagrangiens sont dérivés au Chapitre III. Etant donné qu'il s'agit de transitions entre particules hadroniques nous donnons aussi un calcul des effets de courte distance dûs aux interactions fortes.
Dans le chapitre IV nous donnons une méthode approchée pour calculer les éléments de matrice des lagrangiens entre les particules physiques. Les quantités physiques caractérisant la violation de CP sont alors calculées. Jusqu'à présent, seuls les effets de courte distance ont été pris en compte et au chapitre V nous calculons les contributions dispersives, qui modifient profondément les résultats obtenus dans le modèle de Weinberg . Les calculs précédents nous ont amenés à introduire des opérateurs particuliers appelès "pingouin" qui induisent des transitions purement $\Delta S = 1$ et $\Delta I = 1/2$ et qui sont essentiels pour comprendre la règle $\Delta I = 1/2$ des interactions faibles non leptoniques. Une analyse phénoménologique de leur contribution, utilisant en particulier le taux de désintégrations $K_L \to 2\gamma$, montre que ces opérateurs dominent les désintégrations $\Delta I = 1/2$ (Chapitre IV)
Dans le chapitre VII, nous passons en revue d'autres phénomènes où se manifeste la violation CP. En particulier, nous évoquons l'assymétrie baryons-antibaryons dans l'univers qui peut se comprendre au sein des théories grand-unifiées s'il y a violation de CP. Cette violation apparait alors comme un effet essentiel pour la compréhension de la structure actuelle de l'univers.

Un autre sujet traité est la désintégration du proton. Les théories grand unifiées qui unifient les interactions fortes, faibles et électromagnétiques prédisent en effet des interactions violant le nombre baryonique. Une conséquence est la désintégration du proton en lepton et méson, et il convient de calculer son temps de vie. Au chapitre VIII, nous présentons un calcul basé sur l'algèbre des courants et tenant compte de l'extrapolation sur la région physique.

I. RESULTATS EXPERIMENTAUX ET PHENOMENOLOGIQUES

Parmi l'octet des mésons pseudoscalaires les Kaons neutres (K_o et $\overline{K}_o$) occupent une place privilégié vis à vis de l'interaction faible. Cela est dû au fait que K_o possède un nombre quantique d'étrangeté non nul ($S = 1$) (pour $\overline{K}_o$ $S = -1$), les autres nombres quantiques de charge étant nuls. Les interactions fortes et électromagnétiques conservant l'étrangeté K_o et $\overline{K}_o$ ne peuvent se tranformer l'un en l'autre par ces interactions. Cependant l'interaction faible violant l'étrangeté, il est possible d'observer des transitions $K_o - \overline{K}_o$ soit directement ($\Delta S = 2$) soit par l'intermédiaires d'états d'étrangeté nulle (par exemple $K_o \to 2\pi \to \overline{K}_o$).

Cette situation est différente pour les autres particules : soit les particules et antiparticules se distinguent par des nombres quantiques strictement conservatifs (charge électrique, nombre baryonique exemple (π^+, π^-) soit elles sont identiques (ex. π_o,γ).
Ici nous avons un cas intermédiaire qui permet d'étudier des effets propres à l'interaction faible.

1) Matrice de masse

Considérons le Hamiltonien total $H = H_o + H_w$.
H_o représentant les interactions fortes et électromagnétiques, H_w les interactions faibles.
H_w n'est pas diagonal dans la base K_o, $\overline{K}_o$.
Introduisons la matrice de masse $\mathcal{M}$, de la façon suivante :

soit $|\psi(t)\rangle = a_1(t)\,|K_o\rangle + a_2(t)\,|\overline{K}_o\rangle$ $\qquad \psi(t) = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}$

on aura

$$i\frac{d\psi}{dt} = \mathcal{M}\psi \qquad \mathcal{M} = M - \frac{i\Gamma}{2}$$

La théorie des perturbations usuelles donne

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta} = \langle\alpha|H|\beta\rangle + \sum_n \frac{\langle\alpha|H_w|n\rangle\langle n|H_w|\beta\rangle}{m_K - (m_n - i\varepsilon)}$$

Soit en utilisant $\frac{1}{v+i\varepsilon} = V_p \frac{1}{v} - i\pi\delta(v)$

$$M_{\alpha\beta} = \langle\alpha|H|\beta\rangle + V_p \sum_n \frac{\langle\alpha|H_w|n\rangle\langle n|H_w|\beta\rangle}{m_K - m_n}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \pi \sum_n \langle\alpha|H_w|n\rangle\langle n|H_w|\beta\rangle \delta(m_K - m_n)$$

Nous supposerons dans la suite que l'invariance CPT est réalisée. D'une part, c'est un fait expérimental, les particules et antiparticules ayant des masses et des durées de vie égales, d'autre part, les théories que nous envisagerons sont locales et covariantes et conservent CPT automatiquement. Dans ce cas $M_{11} = M_{22} = M$ $\Gamma_{11} = \Gamma_{22} = \Gamma$

La matrice de masse s'écrit alors :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} M - i\frac{\Gamma}{2} & M_{12} - i\frac{\Gamma_{12}}{2} \\ M_{12}^* - i\frac{\Gamma_{12}^*}{2} & M - i\frac{\Gamma}{2} \end{bmatrix}$$

par définitions les états propres sont $|K_L\rangle$ et $|K_S\rangle$ de valeurs propres $m_i - \frac{i\gamma_i}{2}$ $i = LS$.

Deux états distincts ont été observés de masses très voisines $m_K = 497{,}67$ MeV (la différence est un effet des interactions faibles), par contre leurs durées de vie sont très différentes :

$\tau_L = 5,183\ 10^{-8}\ s$

$\tau_S = 0,8923\ 10^{-10}\ s$

K_L se désintégrant en 3 particules (3π, $\pi l\nu$), K_S principalement en 2π
Si CP est une symétrie du Hamiltonien total les états propres de M sont des état propres de CP soit

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K_0\rangle + |\bar{K}_0\rangle\right) \qquad CP = +1$$

$$|K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K_0\rangle - |\bar{K}_0\rangle\right) \qquad CP = -1$$

Les états de désintégration doivent avoir une valeur donnée de CP pour
(2π) CP = +1 (3π) CP = -1.
K_1 doit alors être assimilé à K_S, K_2 à K_L.
Nous allons maintenant étudier des effets plus fins.

2) <u>Différence de masse</u> $\Delta m = m_{K_L} - m_{K_S}$

Δm peut être mesuré dans des phénomènes d'oscillations d'étrangeté : les kaons sont produits par interactions fortes donc avec une étrangeté bien définie (K_o ou $\bar{K}_o$) ex. $\pi^- + p \rightarrow K_o + \Lambda_o$ par contre K_o évolue au cours du temps de la façon suivante :

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K_S\rangle e^{-i\lambda_S t} + |K_L\rangle e^{-i\lambda_L t}\right)$$

avec $\lambda_i = m_i - \frac{i\gamma_i}{2}$.

La probabilité d'observer un $\bar{K}_o$ est alors

$$P(\bar{K}_o, t) = \frac{1}{4}\left(e^{-\gamma_L t} + e^{-\gamma_S t} - 2e^{-(\gamma_L+\gamma_S)t/2}\cos \Delta m\, t\right)$$

La mesure de la période d'oscillation de $P_{\bar{K}_o}$ donne Δm

Remarquons que l'observation d'un tel phénomène, donne tout son sens au principe de superposition cohérente en mécanique quantique. Les expériences réalisées utilisent en plus la régénération : on fait diffuser un faisceau sur une cible, K_o et $\overline{K}_o$ ayant des amplitudes de diffusion élastique f et $\overline{f}$ avec $f \neq \overline{f}$. Si le faisceau initial est constitué de K_L, K_S est produit avec une amplitude proportionnelle à $\frac{1}{2}(\overline{f} - f)$.

Les expériences les plus précises utilisent deux régénérateurs séparés par une épaisseur de vide où se produit l'oscillation en $\cos \Delta m t$. Les mesures donnent : $\Delta m = + 0{,}5349 \pm 0{,}0022\ 10^{10}\ \hbar/S$

Soit $\Delta m \cong 3{,}510^{-6}$ eV

remarquons la très faible valeur de $\frac{\Delta m}{m} \sim 10^{-14}$.

Si Δm est du 1er ordre en interaction faible, $\frac{\Delta m}{m} \sim \frac{H_w}{H_o}$ or

$\frac{H_w}{H_o} \sim (G_F\ m_p^2)\ \cos\theta_2\ \sin\theta_2 \sim 10^{-7}$

Ainsi la différence de masse $m_{K_L} - m_{K_S}$ est un effet du 2è ordre, ou autrement dit, il n'existe pas de courants neutres $\Delta S = 2$.

3) Désintégrations $K \to 2\pi$

Les 2π sont dans l'onde S.

Considérant les états symétriques on a par rapport aux états d'isospin :

$$|\pi^+\pi^-\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{3}} |2\pi\rangle_{I=2} + \sqrt{\frac{2}{3}} |2\pi\rangle_{I=0}$$

$$|\pi^0\pi^0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |2\pi\rangle_{I=2} - \sqrt{\frac{1}{3}} |2\pi\rangle_{I=0}$$

L'expérience montre que les désintégrations $K \to 2\pi$ se font surtout dans la voie $I = 0$ (règle $\Delta I = 1/2$).

Ainsi la désintégration $K^+ \to \pi^+\pi^o$ qui est $\Delta I = 3/2$ est très faible

$$\frac{\Gamma(K^+ \to \pi^+\pi_0)}{\Gamma(K_S \to \pi\pi)} = \frac{1}{670}$$

De cette information on tire $\frac{|A_2|}{|A_1|} \sim 1/20$ avec $A_I\ e^{i\delta_I} = \langle (2\pi)_I\ |H|\ \overline{K}_o \rangle$

δ_I est le déphasage de $(2\pi)_I$, introduit pour tenir compte de l'interaction forte dans l'état final. (Th. de Wattson).

Nous avons vu que si CP est conservé K_L est de CP=-1 ainsi que ses produits de désintégration. Or en 1964 Christenson et al.[1] observèrent des désintégrations $K_L \to \pi^+ \pi^-$ dans le rapport $\frac{(K_L \to \pi^+ \pi^-)}{(K_L \to \text{modes chargés})} = (2 \pm 0{,}4)\,10^{-3}$

comme d'autre part $K_L \to 3\pi$ de CP=-1, l'état final n'a donc pas de parité CP déterminé. Nous en déduisons donc que le Hamiltonien H viole CP.

Cette violation peut se faire de deux façons distinctes :

- la matrice de masse viole CP : ses états propres K_L et K_S n'ont alors pas de parité CP déterminée.

K_L a une parité CP = - 1 , mais la transition $K_L \to 2\pi$ viole CP . Il est alors intéressant de savoir si ces 2 effets ont lieu simultanément et quel est leur poids relatif.

Introduisons $$\eta_{ij} = \frac{\langle K_L | H_w | \pi_i \pi_j \rangle}{\langle K_S | H_w | \pi_i \pi_j \rangle}$$

S'il y a violation de CP dans la matrice de masse, les états propres s'écrivent

$$|K_S\rangle = \frac{1}{(1+|\varepsilon|^2)^{1/2}} \left(|K_1\rangle + \varepsilon |K_2\rangle \right)$$

$$|K_L\rangle = \frac{1}{(1+|\varepsilon|^2)^{1/2}} \left(|K_2\rangle + \varepsilon |K_1\rangle \right)$$

où $$\varepsilon = \frac{i\,\mathrm{Im}\,M_{12} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,\Gamma_{12}}{-\Delta m + \frac{i}{2}\Delta\Gamma} \qquad M_{12} = \langle K_o | H_w | \bar{K}_o \rangle$$

$$-\frac{1}{2}\Delta m = \mathrm{Re}\,M_{12} \qquad \Delta\Gamma = \Gamma_L - \Gamma_S$$

utilisent l'information expérimentale $\Delta m = 1/2\ \Delta\Gamma$

On obtient

$$\varepsilon = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}} \left(i\,\frac{\mathrm{Im}\,M_{12}}{\Delta m} + \frac{\mathrm{Im}\,\Gamma_{12}}{\Delta\Gamma} \right)$$

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{2m}{\Delta\Gamma}$$

Déterminons maintenant les η_{ij}.

L'étrangeté était conservée dans les interactions fortes, $|K_o\rangle$ et $|\bar{K}_o\rangle$ peuvent subir la transformation $e^{i\delta\theta}$

Ajustons l'angle θ pour que $A_o \in \mathbb{R}$. Avec cette convention on obtient, utilisant $\mathrm{Re}A_2 \ll A_o$,

$$\eta_{+-} = \varepsilon + \varepsilon'$$

$$\varepsilon' = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{Im}\, A_2}{A_o} e^{i(\delta_2 - \delta_o)}$$

$$\eta_{00} = \varepsilon - 2\varepsilon'$$

ε' est relié à la violation de CP directe $K \to 2\pi$, ε à l'effet de matrice de masse.

Expérimentalement ε' est très faible $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = -0{,}003 \pm 0{,}015$, les erreurs n'excluant pas $\varepsilon' = 0$.

Notons que c'est ce rapport ε'/ε qui permet de départager les différentes théories, les valeurs de η_{ij} pouvant toujours être ajustées aux valeurs expérimentales. Aussi nous nous attacherons surtout à calculer ce rapport ε'/ε, si la théorie envisagée introduit une violation de CP $K \to 2\pi$ et A_o calculé sera complexe : $(A_o)_{th} = |A_o|\, e^{i\phi}$ pour nous ramener à la convention phase A_o réel, il faut faire la transformation $|K^o\rangle \to e^{-i\phi}|K^o\rangle$

Si la théorie envisagée viole CP surtout dans le canal $I=0$ c'est à dire que $(\mathrm{Im}\, A_2)_{th} \ll \phi\, R_e\, A_{2\,th}$ on obtient

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = -e^{i(\delta_2 - \delta_o - \phi)} \frac{2\phi}{\varepsilon_m + 2\phi} \frac{\mathrm{Re}\, A_{2\,th}}{A_o}$$

utilisant l'information $\frac{|A_2|}{A_o} = \frac{1}{20}$ on obtient $\left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right| = \frac{1}{20} \frac{2\phi}{2\phi + \varepsilon_m}$

$$\varepsilon_m = \frac{\mathrm{Im}\, M_{12}}{R_e\, M_{12}}$$

La valeur expérimentale de ε'/ε donne ^{2} $\frac{\xi}{\varepsilon_m} = 0{,}03 \begin{matrix} +\,0{,}25 \\ -\,0{,}13 \end{matrix}$

II. MODELES THEORIQUES

Nous souhaitons construire un modèle, c'est à dire un Lagrangien qui rende compte de la violation de CP. Le premier modèle proposé fut la théorie super-faible de Wolfenstein [3] : il existe une interaction entre K_o et $\overline{K}_o$ qui viole CP. Dans une telle théorie $\varepsilon' = 0$. Le principal défaut d'un tel modèle est de ne pas s'intégrer naturellement aux théories existantes des interactions faibles. Nous prendrons comme point de départ une théorie de jauge qui a l'avantage d'être renormalisable, plus précisément la théorie de Weinberg-Salam dont le groupe de jauge $G = SU(2) \otimes U_Y(1)$ est spontanément brisé en $U_Q(1)$.

Le problème est alors d'introduire une violation de CP dans ce cadre et de la façon la plus naturelle possible. La violation de CP se traduit dans un Lagrangien par l'existence de phases dans les couplages.
Les contraintes qui nous sont alors imposées sont les suivantes :

i) les phases introduites ne peuvent être réabsorbées par une redéfinition des champs, leurs effets étant alors inobservables.

ii) le lagrangien ne contient pas de courants neutres changeant l'étrangeté. Cette condition nous est dictée par l'expérience :

$$\frac{\Gamma(K_o \to \mu^+\mu^-)}{\Gamma(K_o \to \text{Tout})} \sim 10^{-8} \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{\Delta m_K}{m_K} \gtrsim 10^{-14}$$

iii) la violation de CP induite doit rester un effet très faible. Nous allons voir qu'il existe deux modèles vérifiant ces conditions ; celui de Kobayashi-Maskawa (KM) et celui de Weinberg (W).

A) Le Modèle de Kobayashi-Maskawa [4]

Formulons le théorie de la façon la plus générale. Introduisons

n quarks P_i^o de charge 2/3 (exemple u, c) et n quarks : N_i^o de charge - 1/3 (exemple d,s...).

Soit les doublets d'isospins faibles :

$$L_i^o = \begin{pmatrix} P_i^o \\ N_i^o \end{pmatrix}_L \qquad T = 1/2 \qquad Y = 1/3$$

, le singlets $P_{i_R}^o$, $N_{i_R}^o$ $T = 0$

et les vecteurs $P^o = \begin{vmatrix} P^o \\ \vdots \\ P_n^o \end{vmatrix}$ $N = \begin{vmatrix} N_1^o \\ \vdots \\ N_n^o \end{vmatrix}$ de quarks de charges données.

La symétrie $SU(2) \times U(1)$ est brisée de façon minimale c'est à dire par un seul doublet de Higgs $H = \begin{vmatrix} H^+ \\ H_o \end{vmatrix}$ $\langle H_o \rangle = \lambda_o$.

Le couplage de Yukawa entre Higgs et fermions, induit alors un terme de masse :

$$\mathcal{L}_m = \bar{P}_L^o \mathcal{M}^+ P_R^o + \bar{P}_R^o \mathcal{M} P_L^o + (P^o \leftrightarrow N^o) \qquad (1)$$

$\mathcal{M}$ n'est pas diagonale, et peut être complexe. Dans ce cas on a introduit la violation de CP de façon explicite. On peut diagonaliser $\mathcal{M}$ de la façon suivante

$\mathcal{M}^2 = \mathcal{M}^+ \mathcal{M}$ est hermitienne et positive. Il existe alors U_R unitaire et D^2 , diagonale et positive, telles que $U_R \mathcal{M}^2 U_R^+ = D^2$. Soit M la racine positive de D^2 alors $U_L = \mathcal{M}^{-1} U_R^+ D$ est unitaire.

Il existe donc deux matrices unitaires U_L et U_R telles que

$U_R \mathcal{M} U_L^+ = M$ diagonale et positive.

On peut alors définir les champs physiques (i.e. de masse donnée) par

$P_L = U_L^{(p)} P_L^o$ et $P_R = U_R^{(p)} P_L^o$ (de même pour N)

$$\mathcal{L}_m = \bar{P}_L M P_R + \bar{P}_R M P_L + (P \leftrightarrow N)$$

Les courants chargés qui sont définis par :

$J_\mu^{i+} = \bar{P}^o_{iL} \gamma_\mu N^o_{iL}$ deviennent $J_\mu^{+i} = \bar{P}_{iL} \gamma_\mu L U N_{iL}$

avec $U = U_L^{+(P)} U_L^{(N)}$ matrice unitaire

Nous pouvons vérifier qu'avec un tel formalisme les courants neutres sont diagonaux. Les courants neutres contiennent donc deux parties, l'une proportionnelle au courant électromagnétique, et l'autre J_μ^o reliée à J_μ^+ et J_μ^- par $2 J_\mu^o = [J_\mu^+, J_\mu^-]$ (les courants sont associés à la représentation adjointe de SU(2))

J_μ^+ peut s'écrire $J_\mu^+ = \bar{\Psi} \gamma_\mu L c^+ \Psi$ $J_\mu^- = \bar{\Psi} \gamma_\mu L c \Psi$

où $\Psi = \begin{vmatrix} P \\ N \end{vmatrix}$ et $c^+ = \begin{bmatrix} 0 & U \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Dans ce cas $2 J_\mu^o = \bar{\Psi} \gamma_\mu L [c^+, c] \Psi$ $[c^+, c] = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$

compte tenu que $UU^+ = 1$

Ainsi, si les particules qui se couplent aux bosons W^+ peuvent être classées en doublet de SU(2), les courants neutres ne changent pas l'étrangeté. Quel est le nombre de paramètres indépendants dans U? (Matrice unitaire $n \times n$).

Il y a n^2 paramètres dont $\frac{1}{2}n(n-1)$ sont réels (angles) et 1/2 n(n+2) phases.

On peut redéfinir les phases de champs de telle que certaines phases seront absorbées. Cependant il ne faut pas que ces définitions induisent de nouvelles phases dans le Lagrangien.

Eliminer des phases dans U, revient à éliminer des phases dans le couplage complexe de Yukawa $\sum_{ij} \bar{L}^o_i H N^o_j \Gamma_{ij}$

Par contre, les couplages avec les bosons de jauge doivent rester invariants ainsi que le reste de la théorie, qui est diagonal par rapport aux différentes générations.

On vérifie sans peine que les transformations $P^o_{i_L} \to e^{i\alpha_i} P^o_{i_L}$, $N_L^{io} \to e^{i\beta_i} N_L^{io}$

N_L^{io} sont possibles avec H invariant. Dans ce cas on peut absorber 2n-1 phases. Il reste donc $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ phases observables.

a) cas n = 2

Dans ce cas, les doublets sont $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$ $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$; toutes les phases sont absorbées par une redéfinition du champ, il reste alors une seul angle θ_c (angle de cabibbo). Le quark charmé c fut introduit pour expliquer la supression des courants neutres, $\Delta S \neq 0$, par le mécanisme décrit plus haut (mécanisme de G.I.M) [5] .
Si l'on veut une phase observable, il faut étudier le cas n = 3.

b) cas n = 3

On introduit un nouveau doublet $L_3 = \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$

Le quark b a été observé ($m_b \simeq 4 GeV$), mais pas encore le quark t. Cependant, si on se limite au cas de Weinberg-Salam, l'existence du t est nécessaire. Il existe en effet un 3ème doublet leptonique $L = \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$ ce qui nécessite un troisième doublet de quark pour préserver la renormalisabilité de la théorie.

Il faut en effet que l'anomalie axiale disparaisse, or cette anomalie est proportionnelle à $\sum_{\text{doublets}} Y$ qui n'est nul que si le nombre de doublets leptoniques est égal à celui des quarks.

La matrice U a donc 1 phase observable et 3 angles. On peut la paramétriser de la façon suivante :

$$K = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 c_3 & -s_1 s_3 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 s_2 s_3 - s_2 c_3 e^{i\delta} \end{bmatrix}$$

$c_i = \cos\theta_i \quad s_i = \sin\theta_i$

ce couplage $J^+_\mu W_\mu + h.c$ viole donc CP. Remarquons que la forme de K n'est pas unique mathématiquement. Cependant la forme donnée ici rend compte de la petitesse de la violation de CP : les vertex qui violent CP sont ceux qui couplent c à s et b , t à s et b, d'autre part dans le vertex $c \leftrightarrow s$ la phase intervient dans un facteur $s_1 s_3 e^{i\delta}$ et nous verrons que θ_3 est faible. Ainsi ce modèle ne donne pas une explication naturelle de la faible valeur de ε et ε' .

Détermination expérimentale des angles

c_1 couple U et d, peut donc être mesuré dans la désintégration β du neutron :

$G_V = G_F C_1$ G_V = constante vectorielle du courant hadronique G_F étant déterminé par la désintégration du muon. Tenant compte des corrections radiatives, on trouve

$$c_1 = \cos\theta_c = 0,974 \pm 0,002$$

$s_1 c_3$ couple U et S; son effet est donc visible dans les désintégrations semi-leptonique des Hypérons :

$$\Lambda \to p e \bar{\nu}, \quad \Sigma \to n e \bar{\nu}, \quad \cdots$$

La comparaison des différents taux de sésintégration donne

$$s_1 c_3 = 0,219 \pm 0,11$$

$$s_1^2 + c_1^2 = 1 \qquad s_3^2 \leqslant 0,07$$

Ainsi θ_3 est très faible tout comme θ_1. Il semble que ce soit aussi le cas pour θ_2.

B) Le modèle de Weinberg [6]

Dans le modèle minimal, il suffit d'introduire un seul doublet de Higgs pour briser la symétrie SU(2)⊗U(1). Dans ce cas on ne peut introduire de violation de CP que dans la matrice de masse des quarks. Dans le modèle de Weinberg trois doublets de Higgs sont introduits, les couplages entre Higgs peuvent violer CP. Nous verrons qu'il en résulte des couplages complexes entre Higgs chargés et fermions, sans induire de violation de CP dans les couplages entre bosons de jauges et fermions.
D'autre part, l'ordre de grandeur de la constante de couplage et la masse des Higgs chargés donnent une explication naturelle à la faible valeur de la violation de CP.

1) La matrice de masse de Higgs

On introduit 3 doublets $\phi_i = \begin{vmatrix} \psi_i^+ \\ \psi_i^0 \end{vmatrix}$ $i = 1, 2, 3$

Le potentiel le plus général, invariant selon SU(2) $U_Y(1)$ est

$$V(\phi) = \mu_i^2 (\phi_i^+ \phi_i) + a_{ij} (\phi_i^+ \phi_i)(\phi_j^+ \phi_j) + b_{ij} (\phi_i^+ \phi_j)(\phi_j^+ \phi_i) + c_{ij} (\phi_i^+ \phi_j)^2$$

$b_{ii} = c_{ii} = 0$ par définition (3)

L'hermiticité de V impose : a_{ij}, b_{ij} réels, c_{ij} hermitiques. V brise la symétrie, soit $\langle \psi_i^0 \rangle = \lambda_i$ non tous nuls.

Remarquons que λ_i peut être complexe.
La matrice de masse est alors obtenue en remplaçant ψ_i^0 par λ_i dans V et en conservant la partie quadratique en ψ_i^+. Cette matrice est complexe et non diagonale. Elle peut être diagonalisée en introduisant les champs propres H_i^+ reliés aux ψ_i^+ par une transformation unitaire $Y = \psi_i^+ = Y_{ij} H_j^+$
Y possède 3 angles et 6 phases. L'un des H_i^+ doit être de masse nulle (goldstone associé à la symétrie brisée) et se couple aux bosons de jauge chargés. Appelons H_1^+ ce boson de goldstone. Dans ce cas $\langle H_1^0 \rangle = U \neq 0$ et $\langle H_i^0 \rangle = 0$ $i = 1,2$. Ce dernier résultat signifiant qu'un seul doublet

de Higgs participe effectivement à la brisure de symétrie qui est de rang 1. On peut aussi le montrer de la façon suivante : le couplage entre Higgs chargés et W s'écrit : $W_\nu \sum_i \lambda_i \gamma^\nu \phi_i^+ = W_\nu \sum_i v_i \gamma^\nu H_i^+$

avec $\langle H_i^o \rangle = v_i$. Ce terme peut être éliminé du lagrangien par une redéfinition de W , c'est à dire que $\sum_i v_i \gamma H_i^+$ correspond au goldstone chargé absorbé par W_ν . C'est donc un vecteur propre de masse nulle. Donc $v_2 = V_3 = 0$.

Nous cherchons maintenant des phases à éliminer dans Y_{ij}. On peut faire une transformation de phase globale sur ϕ_i pour obtenir $\lambda_i = \langle \psi_i^o \rangle \in \mathbb{R}$ effectuant une autre transformation sur H_1 de telle sorte que $V = \langle H_1^o \rangle \in \mathbb{R}$ on absorbe 3 phases sur Y car $\lambda_i = Y_{i1} V$. Modifiant les phases de H_2 et H_3 on absorbe 2 phases de Y. Après ces transformations il ne reste que 1 phase observable dans Y.

Remarquons que les transformations de phases effectuées sur les ϕ_i peuvent changer le reste du lagnrangien car elles sont différentes pour chaque ϕ_i. Cependant la partie cinétique du Lagrangien est invariante car il s'agit de transformations globales. Nous examinerons par la suite leur effet sur les couplages de Yukawa. Ainsi la matrice Y_{ij} peut s'écrire d'une façon analogue à celle de K.M. La diagonalisation de la matrice de masse peut être effectueée de la façon suivante :

Au niveau en arbre, on obtient :

Pour les termes diagonaux

$$M'^2_{ii} = \mu_i^2 + 2 \sum_j a_{ij} |\lambda_j|^2$$

M' = matrice non diagonale (dans la base ϕ_i).
Soit dans la base H_i :

$$\sum_j M_j^2 |Y_{ij}|^2 = \mu_i^2 + 2v^2 \sum_j a_{ij} Y_{j1}^2$$

De même pour les termes non diagonaux :

$$2v^2 (b_{ik} + c_{ik}) = \sum_j y_{ij} y^*_{kc} M_j^2 \qquad y_{ij} = \frac{Y_{ij}}{Y_{i1}}$$

Nous voyons sur cette dernière expression que si les C_{ij} sont tous réels, la phase δ dans Y est nulle :
par exemple

$$\mathrm{Im}\, C_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{M_2^2 - M_3^2}{v^2}\right)\left(\frac{s_1 s_3 c_3}{c_1 c_2}\sin\delta\right)_Y$$

Cependant si les C_{ij} sont réels, les λ_i peuvent être complexes l'équation vérifiées par les λ_i étant

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \psi_k^0}\right|_{\psi_k^0 = \lambda_k} = 0$$

Or la transformation de phase qui rend les λ_k réels, ne laisse pas invariant V; le dernier terme devient en effet $C_{ij}(\phi_i'^{+}\phi_j')^2 e^{2i(\theta_i - \theta_j)}$

Nous sommes alors ramenés au cas précédent. Nous voyons ainsi qu'il y a identité de formalisme entre le cas de la brisure spontanée (C_{ij} réels et λ_i complexes) et la brisure explicite (C_{ij} complexes).

Remarquons également qu'il est possible de voir qu'il n'y a qu'une phase observable dans la théorie sur le terme $C_{ij}(\phi_i^+\phi_j)^2$. Si les phases de C_{ij} $(i \neq j)$ sont quelconques, seulement 2 peuvent être absorbées par une redéfinition des phases des ϕ_i. Il reste alors une phase obserbable.

2) Couplages de Yukawa [7]

On considère la théorie à 3 générations avec les mêmes notations qu'en A.
Les couplages doivent être invariants par SU(2)⊗U(1) . Le couplage le plus général est de la forme $\sum_{i,j,k} \bar{L}_i^0 \Gamma_{ij}^k R_j \phi_k$ avec Γ_{ij}^k réels (la violation de CP n'intervient que par les Higgs).
Examinons plus en détail la partie neutre du couplage :

$$\sum_{i,j,k} \bar{P}_L^{0i} \Gamma_{ij}^k P_{jR}^0 \psi_k^0 \qquad (4)$$

Ce terme induit une matrice de masse : $M_{ij} = \sum_k \Gamma^k_{ij} \lambda_k$ qui peut être diagonalisée comme en A. Cependant il existe des couplages à 3 particules :

$$\sum \bar{P}^i_L \Gamma^k_{ij} P_{jR} \Psi'_{k0} \qquad \Psi^0_k = \lambda_k + \Psi'^0_k$$

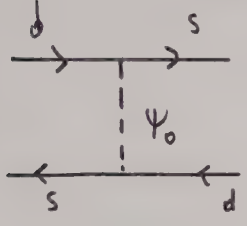
ou en terme de champs physiques :

$$\sum \bar{P}_{iL} (U^+_L \Gamma^k U_R)_{ij} P_{jR} \Psi'_{k0}$$

or si $\sum_k U^+_L \Gamma^k U_R \lambda_k$ est diagonale il n'en existe pas de même pour chaque terme $(U^+_L \Gamma^k U_R)_{ij}$

Il existe donc des courants neutres qui changent l'étrangeté (d'une façon plus générale, la saveur); par exemple

De tels vertex peuvent induire des transitions $\Delta S = 2$



qui est d'ordre $G_F \frac{m_s m_d}{M_H^2}$ ce qui donne une contribution trop importante à Δm_K.

Pour éviter ces ennuis, imposons la conservation naturelle de la saveur (CNF). La solution la plus simple pour réaliser la CNF est de n'introduire qu'une seule valeur de k dans (4).
Autrement dit, on ne couplera les champs de quarks de charge donnée qu'à un seul Higgs neutre. On peut traduire cette contrainte en imposant des symétries discrètes au Lagrangien :

* $L_i \to L_i \qquad P_{iR} \to -P_{iR}$
  $N_{iR} \to N_{iR} \qquad \varphi_1 \to \varphi_1 \quad \varphi_2 \to -\varphi_2 \quad \varphi_3 \to \varphi_3$

* $L_i \to L_i \qquad P_{iR} \to P_{iR}$
  $N_{iR} \to N_{iR} \qquad \varphi_1 \to \varphi_1 \quad \varphi_2 \to \varphi_2 \quad \varphi_3 \to -\varphi_3$

Les seuls couplages possible sont alors :

$$\sum_{i,j} \bar{L}_i \Gamma^{(1)}_{ij} N_{jR} \varphi_1 + \sum_{ij} \bar{L}_i \Gamma^{(2)}_{ij} P_{jR} \tilde{\varphi}_2 \qquad \tilde{\varphi}_2 = \begin{vmatrix} \varphi_2^0 \\ -\varphi_1^+ \end{vmatrix}$$

Donc seulement deux doublets de Higgs peuvent se coupler aux fermions. Nous pouvons examiner l'effet de la tranformation de phase $\varphi_i \to \varphi_i e^{i\theta_i}$

Elle sera sans effets si on effectue la transformation $N_{jR} \to e^{-i\theta_1} N_{jR}$ et $P_{jR} \to e^{i\theta_2} P_{jR}$; le couplage de Yukawa reste donc réel.

La diagonalisation du couplage se fait comme en A :

$M'^{(N)} = \Gamma^1 \lambda_1 \qquad M'^{(P)} = \Gamma^2 \lambda_2$ sont les matrices de masse des quarks (réelles).

Par des transformations orthogonales on obtient, en terme de champs physiques :

$$\mathcal{L}_y = \bar{P}_L K \frac{M^{(N)}}{\lambda_1} N_R \varphi_1^+ - \bar{P}_L \frac{M^{(P)}}{\lambda_2} K N_L \varphi_L^+ \qquad (5)$$

avec K, matrice orthogonale; K peut être écrite dans une forme analogue à celle de KM mais sans phase.

et $M^{(N)} = \text{diag}\,(m_d, m_s, m_b)$

$M^{(P)} = \text{diag}\,(m_u, m_c, m_t)$

Nous obtenons ainsi une théorie où les courants chargés ne contiennent pas de phases; remarquons que ceci n'est possible que grâce à la condition de CNF.

3) Constantes de couplage

Le couplage de Yukawa fait intervenir des quantités inconnues (λ_i) que nous pouvons déterminer en fonction de paramètres directement accessibles (G_F, m etc...)

Une fois la matrice de masse de Higgs chargés diagonalisée en champs H_i^+,

nous sommes ramenés à un problème analogue à la théorie Weinberg-Salam :

$$M_W^2 = g^2 V^2 \qquad \frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4V^2}$$

D'autre part, la relation $\lambda_i = Y_{ij} V_j$ $(V_1=V \quad V_2=V_3=0)$

donne

$$\lambda_1 = (C_1)_y V$$
$$\lambda_2 = (-S_1 C_2)_y V$$
$$\lambda_3 = (-S_1 S_2)_y V$$

On peut alors donner les couplages violant CP avec pour seuls paramètres inconnus les angles θ_{iy}

$$\mathcal{L}_y = 2^{3/4} G_F^{1/2} \bar{P} \left[\sum_{i=1}^{2} K M_N \frac{(1-\gamma_5)}{2} U_i H_i^+ + M_p K \frac{(1+\gamma_5)}{2} V_i H_i^+ \right] N + h.c$$

$$U_1 = \frac{S_1 C_3}{C_1} \qquad U_2 = \frac{S_1 C_3}{C_1}$$

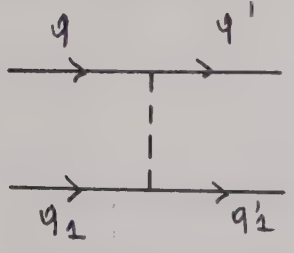
$$V_1 = \frac{C_1 C_2 C_3 + S_2 S_3 e^{i\delta}}{S_1 C_2} \qquad V_2 = \frac{C_1 C_2 S_3 - S_2 C_3 e^{i\delta}}{S_1 C_2}$$

(6)

(l'indice y de C_{iy}, S_{iy} est omis).

Remarques : - La violation de CP dans ce modèle, est naturellement faible quels que soient les paramètres θ_i et δ

Par exemple l'interaction à quatre quarks :



a un coefficient $G_F \frac{mq' \, mq_1}{M_H^2}$ qui est à comparer avec G_F dans le cas de échange d'un W. Or les masses mq sont les masses de courants qui sont très faibles pour les

quarks légers; d'autre part M_H est de l'ordre d'une dizaine de GeV. Il existe en effet une limite inférieure sur la masse de Higgs, de 5 GeV.

- Les masses de quarks apparaissant dans le couplage on s'attend à ce que les effets de quarks lourds prédominent. Ainsi dans le cas de B_o $\overline{B}_o$, la violation de CP dans le modèle de Weinberg, sera beaucoup plus importante que pour K_o-$\overline{K}_o$.

4) Extension aux leptons

Nous souhaitons étudier le couplage des Higgs aux leptons. Pour respecter la condition de CNF, il suffit de coupler les leptons avec un seul doublet, par exemple
Cependant, nous souhaitons avoir un modèle qui soit compatible avec la grande unification qui établit une symétrie quarks-leptons. Nous imposons cette condition pour des raisons esthétiques mais aussi parce que nous souhaitons étudier les conséquences cosmologiques du modèle de Weinberg. Nous nous proposons donc de donner les couplages de Yukawa dans la phase symétrique (à haute énergie) mais aussi d'en tirer les conséquences à basse énergie.

Nous travaillerons dans le cadre du modèle SU(5).
Introduisons les leptons $\ell_i^- = (e^-, \mu^-, \tau^-)$
$\nu_i = (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$

Dans le modèle SU(5), les particules sont rangées dans les représentations 5 et 10

Soit pour 5 :

$$\chi_i^\alpha = \begin{vmatrix} \overline{n}_i^1 \\ \overline{n}_i^2 \\ \overline{n}_i^3 \\ \ell_i \\ \nu_i \end{vmatrix} \qquad 1,2,3 \text{ indices de couleur.} \qquad (7)$$

et pour 10

$$\psi_i^{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 0 & \bar{P}_i^3 & -\bar{P}_i^2 & P_i^1 & n_i^1 \\ -\bar{P}_i^3 & 0 & \bar{P}_i^1 & P_i^2 & n_i^2 \\ \bar{P}_i^2 & -\bar{P}_i^1 & 0 & P_i^3 & n_i^3 \\ -P_i^1 & -P_i^2 & -P_i^3 & 0 & \bar{e}_i \\ -n_i^1 & -n_i^2 & -n_i^3 & -\bar{e}_i & 0 \end{vmatrix} \qquad (8)$$

Pour effectuer la brisure $SU(5) \to SU(3)_c \times U_a(1)$ qui est de rang 2 il faut introduire deux représentations de Higgs au moins : (24), adjointe, responsable de $SU(5) \mapsto SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, qui ne donne pas de masse aux fermions et 5. Par anlogie avec le modèle de Weinberg, introduisons 3 5 - plets de Higgs, φ_i.

Leurs couplages avec les fermions, invariant SU(5) peut s'écrire :

$$\mathcal{L}_y = \Gamma^1_{ij}\, \bar{\Psi}_{i,\alpha\beta}\, \chi^\gamma_j\, \varphi_1^\beta + \Gamma^2_{ij}\, \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu\lambda}\, \Psi_i^{\alpha\beta}\, C\, \Psi_j^{\mu\nu}\, \varphi_2^\lambda + h.c. \qquad (9)$$

C : conjugaison de charge.

La condition CNF impose à chaque φ_i de ne se coupler qu'avec un seul type de terme ($\bar{\Psi}\chi$ ou $\bar{\Psi} C \Psi$).

Examinons le secteur $SU(2) \times U(1)$ c'est à dire les termes où n'apparaissent que les composantes 4 et 5 des φ_i et posons $\varphi_i^+ = \varphi_i^+$ $\varphi_i^S = \varphi_i^0$ (les composantes 1,2,3 sont colorées).

Cette partie de L_y s'écrit :

$$\mathcal{L}'_y = \Gamma^1_{ij}\left(\bar{n}_i P_j \varphi_1^{*+} + \bar{n}_i n_j \varphi_0\right) + \Gamma^1_{ij}\left(\bar{e}_i \gamma_j \varphi_1^{+*} + \bar{e}_i e_j \varphi_1^0\right)$$

$$+ \Gamma^2_{ij}\left(\bar{P}_i n_j \varphi_2^+ + \bar{P}_i P_j \varphi_2^0\right) \qquad (10)$$

Nous reconnaissons dans le secteur des quarks, les mêmes termes que dans (5). Examinons l'effet de la brisure $SU(2) \times U(1)$:

Nous serions alors tenté de conclure que les leptons et les quarks n_i ont

la même masse. Cependant, il faut tenir compte des effets de renormalisation : la relation $M^e = M^n$ n'étant vraie que dans la phase symétrique c'est à dire à une échelle d'énergie $M_{Gut} \sim 10^{14}$ GeV .

Nous souhaitons étudier la théorie $SU(2) \times U(1)$ c'est à dire à une échelle $M_w \sim 10^2$ GeV . Le lien entre les masses à deux énergies distinctes peut être donné par la symétrie SU(5). Ainsi seules les parties finies des ordres supérieurs vont différer quand la symétrie est brisée.
Nous souhaitons étudier la modification des fonctions Γ^k_{ij} quand on passe de la symétrie SU(5) à $SU(3)_c \times SU(2) \times U_y(1) \equiv H$. Dans ce cas le Lagrangien doit avoir la symétrie de H. Il s'écrit alors :

$$\mathcal{L}_y = \Gamma^{1'}_{ij} (\bar{n}_i p_j \varphi_1^{*+} + \bar{n}_i n_j \varphi_0) + \Gamma^{1''}_{ij} (\bar{e}_i \nu_j \varphi_1^{*+} + \bar{e}_i e_j \varphi_1^{\circ})$$

$$+ \Gamma^{2'}_{ij} (\bar{p}_i n_j \varphi_2^{+} + \bar{p}_i p_j \varphi_2^{\circ}) \qquad (11)$$

avec à haute énergie $\Gamma^{1'}_{ij} = \Gamma^{1''}_{ij}$, l'on retrouve le lagrangien invariant SU(5).

Nous sommes maintenant ramenés à un problème $SU(2) \times U(1)$ que nous résolvons comme précédemment. On obtient alors :

$$\mathcal{L}_y = \left(\bar{p}_L K \frac{M^{(n)}}{\lambda_1} N_R + \bar{\nu}_L \frac{M^{(l)}}{\lambda_1} L_R\right) \varphi_1^{+} - \bar{p}_R \frac{M^{(p)}}{\lambda_2} K N_L \varphi_2^{+} \qquad (12)$$

Imposer l'invariance SU(5) sous jacente, nous a donc donné une contrainte supplémentaire pour le couplage des fermions.

III. LAGRANGIENS EFFECTIFS

Les modèles théoriques développés au chapitre II font intervenir les champs fondamentaux, c'est à dire les quarks et les bosons de jauge et de Higgs. Cependant nous souhaitons calculer des amplitudes de transition entre particules physiques (ici mésons pseudoscalaires). Le problème peut être résolu en deux temps. Les mésons sont en effet constitués de quarks et de gluons. Nous nous intéressons surtout aux quarks de valence, c'est à dire aux quarks qui entrent dans la construction des particules dans le modèle SU(3) et qui de ce fait génèrent les nombres quantiques des particules.

Nous pouvons alors dans un premier temps calculer l'opérateur effectif responsable de la transition entre quarks de valence considérés comme libres. C'est ce que nous ferons dans ce chapitre pour différents cas. Dans un deuxième temps, il nous faudra calculer les éléments de matrice de ces opérateurs effectifs entre des états de mésons. Une méthode sera analysée dans le chapitre IV

Etant donné ces difficultés, nous donnerons en fin de chapitre une méthode pour définir un lagrangien phénoménologique, directement en terme de particules physiques.

A) Opérateurs à quatre quarks

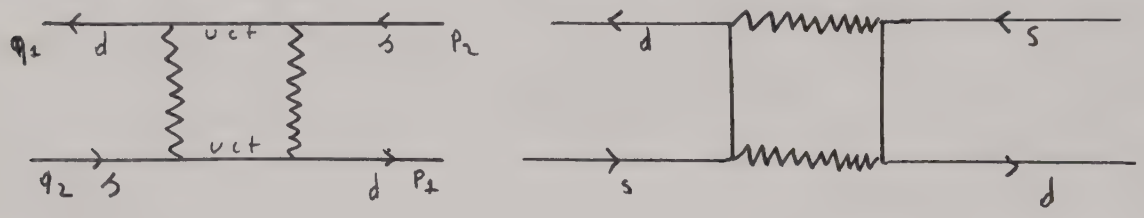
1) Cas $\Delta S = 2$, transition $K_o - \overline{K}_o$

Examinons le cas de la transition $C\rho = +1$, responsable de la différence de masse Δm_K

K_o étant constitué de $s\bar{d}$, il nous faut calculer l'amplitude de transition $s\bar{d} \rightarrow \bar{s}d$ à l'ordre dominant en interaction faible, les quarks

étant considérés comme libres.

Dand le cas CP = +1, l'ordre dominant est donné par l'échange de deux W :



Posant $\gamma_{\pm} = 1 \mp \gamma_5$, l'amplitude du 1er diagramme est :

$$I_1 = \sum_{i,j=u,c,t} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{g}{2\sqrt{2}}\right)^4 \bar{s}(p_2)\gamma_\mu\gamma_- \frac{K_{id}^*}{k+q-m_i}\gamma_\nu\gamma_- K_{is}\, d(p_1)$$

(1)

$$\times \bar{s}(q_2)\gamma^\nu\gamma_- \frac{K_{jd}^* K_{js}}{k-m_j}\gamma^\mu\gamma_- d(p_1) \frac{1}{(k-q_1)^2 - M_W^2} \times \frac{1}{k^2 - M_W^2}$$

K_{ij} étant des éléments de la matrice K.M. pouvant être complexes, le modèle étant soit celui de KM soit celui de Weinberg. Dans la limite M_W grand, le terme dominant est obtenu en remplaçant les propagateurs de W par $1/M_W^2$ Cependant, une telle manipulation rend l'intégrale divergente. Mais la sommation sur les quarks intermédiaires, permet de faire cette substitution sans introduire de divergence.

Posant $\lambda_i = K_{id}^* K_{is}$, négligeant les impulsions externes devant M_W on obtient l'expression

$$I_1 = \left(\frac{g}{2\sqrt{2}}\right)^4 \left(\bar{s}(p_2)\gamma_\mu\gamma_- d(p_1)\right)\left(\bar{s}(q_2)\gamma^\mu\gamma^- d(q_1)\right) \frac{4}{M_W^4} \sum_{i,j} \lambda_i\lambda_j \frac{I_{ij}}{8\pi^2}$$

$$I_{ij} = -i \int_0^1 dx\, M_{ij}^2 \log M_{ij} \qquad M_{ij}^2(x) = x m_i^2 + (1-x) m_j^2 \qquad (2)$$

Remarquons que l'unitarité de K impose $\sum_i \lambda_i = 0$, condition permettant la convergence de l'intégrale. Le fait de négliger les impulsions externes rend l'interaction effective ponctuelle. Un lagrangien effectif est un opérateur local, tel que

$$I_1 + I_2 = \langle s\bar{d} | i\mathcal{H}_{eff} | \bar{s} d \rangle$$

Dans le cas à 4 quarks, on obtient

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{G_F^2}{16\pi^2}(\sin\theta_c\cos\theta_c)^2 m_c^2 J_\mu J^\mu + h.c = C_J J_\mu J^\mu + h.c. \qquad (3)$$

avec $J_\mu = \bar{s}\gamma_\mu\gamma_- d$

Il est à remarquer que sans mécanisme de G.I.M., ($\sum\lambda_i = 0$), I_1 est d'ordre $\propto G_F$, l'intégrale dans I_1, ayant un mauvais comportement ultra-violet. Remarquons également que m_c^2 est en facteur dans (3) c'est à dire que $C_J \to \infty$ quand $m_c^2 \to \infty$. Or m_c apparait dans le dénominateur de (1), et l'on serait alors tenté de conclure que $C_j \to 0$ quand $m_c \to \infty$. Ce phénomène, remarqué par Witten[8] est dû au mauvais comportement ultraviolet de (1), c'est donc un effet de courte distance. Il est aisé d'obtenir L_{eff} dans le cas général de KM, utilisant $\sum_i \lambda_i = 0$

$L_{eff} = C'_j J_\mu J^\mu + h.c.$

avec

$$C'_J = -\left[\lambda_t^2 m_t^2 + \lambda_c^2 m_c^2 + \frac{2\lambda_c\lambda_t m_c^2}{1-\frac{m_c^2}{m_t^2}} \log\frac{m_t^2}{m_c^2}\right]\frac{G_F^2}{16\pi^2}.$$

avec

$$\lambda_c = s_1 c_2 (c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta}) \qquad (4)$$
$$\lambda_t = s_1 s_2 (c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{-i\delta})$$

2) Lagrangien effectif dans le modèle de Weinberg $\Delta S = 2$ [9] [10]
Nous nous intéresserons à la partie CP=-1. Le terme dominant violant CP est donné par les diagrammes en boites, où sont échangés 1 Higgs et 1 W (fig.2).

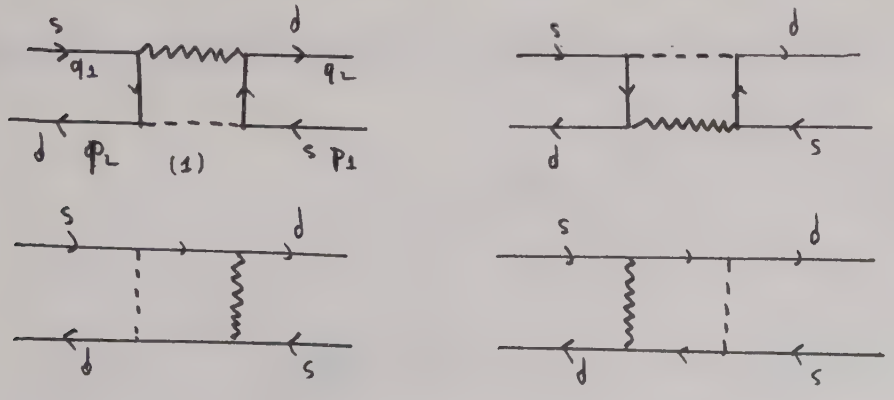


Figure : 2

calculons l'amplitude de (1), violant CP. Les vertex couplant Higgs et quarks, font apparaître des masses m_d, m_s, m_{qi} m_{qj}

Ne retenant que les termes en m_s, I_1 peut s'écrire :

$$I_1 = \sum_{ij} m_j^2 \, I_1(i,j) \, \lambda_i \lambda_j \left(\frac{g}{2\sqrt{2}}\right)^2 G_F 2^{1/2} m_s$$

$$I_1(i,j) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{d}(p_2)\gamma_\mu (k+p_2)\gamma_+ s(p_1) \; \bar{d}(q_2)\gamma^\mu\gamma_- s(p_1) \; U_i^* V_i}{2 D_{ij}} \qquad (5)$$

$$D_{ij} = \left[(k+p_2)^2 - m_{Q_j}^2\right]\left[(k+q)^2 - M_H^2\right]\left[(k+q_1)^2 - M_{Q_i}^2\right](k^2 - M_W^2)$$

$$q = q_1 - q_2 = p_2 - p_1$$

De même qu'en 1°, nous négligeons les impulsions externes devant M_W^2 et M_H^2, obtenant ainsi un opérateur local.
Par contre si nous négligeons les termes $\frac{m_c^2}{M_W^2} \ll 1$, nous donnons une expression exacte en $\frac{m_c^2}{M_H^2}$ (Dans le cas à 3 générations m_t peut être supérieur à M_H.

Dans le cas à 2 générations, on obtient (voir Appendice B), ne retenant que les termes dominants en m_c^2 :

$$I = \frac{G_F^2}{32\pi^2} (\cos\theta_c \sin\theta_c)^2 m_c^2 m_s \sum_{i=1}^{2} \frac{\mathrm{Im}\, U_i^* V_i}{M_{H_i}^2} I_i$$

$$I_i = i\tilde{g}\left[h(x_i)(q_1-p_2)^\nu + 4 g(x_i) p_1^\nu\right] \bar{d}(p_2)\gamma_\mu\gamma_\nu R s(p_1) \; \bar{d}(q_2)\gamma^\mu L s(q_1) \qquad (6a)$$

$$h(x_i) = \frac{1}{1-x_i} + \frac{2x_i}{(1-x_i)^2}\left(1 - \frac{1}{(1-x_i)} \log 1/x_i\right)$$

$$g(x_i) = \frac{x_i}{(1-x_i)^2} + \frac{x_i(1+x_i)}{2(1-x_i)^2} \log 1/x_i \qquad x_i = \frac{m_c^2}{M_{H_i}^2} \qquad (6\,b)$$

Dans la limite $\frac{m_c^2}{M_{H_c}^2} \to 0 \quad h \simeq 1 \quad$ et $\quad \alpha_s \simeq 0$

avec les valeurs $m_c \simeq 1{,}8$ GeV $M_H = 10$ GeV les corrections données par (6 b) sont très faibles.

Le lagrangien effectif s'ecrit alors :

$$\mathcal{L}^{CP=-1}_{\Delta S=2} = \tilde{a}_s (q_1 - p_2)^\nu \bar{d}(p_2) \gamma_\mu \gamma_\nu R s(p_1) \bar{d}(q_2) \gamma^\mu L s(q_1) + h.c \qquad (7)$$

avec

$$\tilde{a}_s = \frac{G_F^2}{32\pi^2} (\cos\theta_c \sin\theta_c)^2 m_c^2 m_s \sum_{i=1}^{2} \frac{\mathrm{Im}\, U_i V_i^*}{M_{H_i}^2}$$

Il est immédiat que $\langle s\bar{d} | \mathcal{L}^-_{\Delta S=2} | d\bar{s} \rangle$ reconne la contribution des quatre diagrammes de la Fig. 2.

L peut aussi s'écrire dans l'espace des X :

$$\mathcal{L} = \tilde{a}_s \left(\bar{d}_\alpha(x) \gamma^\mu L s_\beta(x)\right) \left(i \overleftrightarrow{\partial}_\nu\right) \left(\bar{d}_\beta(x) \gamma_\mu \gamma_\nu R s_\alpha(x)\right) \qquad (8)$$

α et β étant des indices de couleur.

Dans le cas à 3 générations, on ne peut faire l'approximation $x_t \ll 1$

Le lagrangien effectif s'écrit alors :

$$\mathcal{L}^{\Delta S=2}_{HW} = \frac{G_F^2}{32\pi^2} m_s \left(\bar{d}_\alpha \gamma^\mu L s_\beta\right) \left[F \left(i\overrightarrow{\partial}_\nu\right) \bar{d}_\beta \gamma^\mu \gamma^\nu R s_\alpha + G\, \bar{d}_\beta \gamma^\mu \gamma^\nu L \left(i\overrightarrow{\partial}_\nu\right) s_\alpha\right]$$

$$F = \sum \frac{\mathrm{Im}\, \gamma_i}{M_{H_i}^2} \left[\lambda_c^2 m_c^2 + \lambda_t^2 m_t^2 \left[\frac{m_{H_i}^2 (m_{H_i}^2 - m_t^2)}{(m_{H_i}^2 + m_t^2)^2} + \frac{2 m_{H_i}^2 m_t^2}{(M_H^2 - m_t^2)^3} \log \frac{m_t^2}{m_H} \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\lambda_t \lambda_c m_c^2 \left[\frac{m_t^2}{m_{H_c}^2 - m_t^2} + \log \frac{m_t^2}{m_c^2} + \frac{m_t^4}{(m_{H_c}^2 - m_t^2)^2} \log \frac{m_t^2}{m_{H_c}^2} \right] \right.\right.$$

$$G = \sum \frac{\mathrm{Im}\,\gamma_i^2}{M_{H_i}^2}\left[\left[\frac{-m_t^2}{m_{H_i}^2 - m_t^2} + \log\frac{m_t^2}{m_c^2} - \frac{m_t^4}{(m_{H_i}^2 - m_t^2)^2}\log\frac{m_t^2}{m_{H_i}^2}\right] 2\lambda_c\lambda_t m_c^2\right.$$

$$\left. + \lambda_t^2 m_t^2\left[\frac{m_{H_i}^2(m_{H_i}^2 - 3m_t^2)}{(m_{H_i}^2 - m_t^2)^2} - \frac{2m_t^2 m_{H_i}^2}{(m_{H_i}^2 - m_t^2)^2}\log\frac{m_t^2}{m_{H_i}^2}\right]\right] \qquad (9)$$

Avec $\gamma_i = U_i V_i^*$

D'autres types de diagrammes contribuent au terme CP = -1, mais avec un poids plus faible ; ce sont les diagrammes où 2 Higgs sont échangés (Fig. 3)

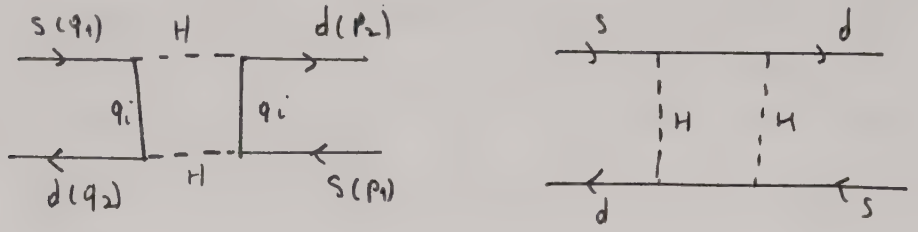


Figure 3

Le coefficient de ces diagrammes, sera de l'ordre $G_F^2 m_s \frac{m_c^4}{M_H^4}$ qui doit être comparé à $G_F^2 m_s \frac{m_c^2}{M_H^2}$ pour $\mathcal{H}_{HW}$

Donc dans le cas de 3 générations, le terme dominant est donné par l'échange de deux t . Appelons H le plus léger des Higgs et négligeons la contribution de l'autre Higgs, on obtient :

$$\mathcal{H}_{HH}^- = \frac{G_F^2}{16\pi^2}\frac{m_t^4}{M_H^4}\lambda_t^2 \sum_{i=1}^{2} \mathrm{Im}\,U_i V_i \left\{ \mathrm{Re}\,(U_i V_i^*)\ \bar{d}(p_2) R s(p_1)\ \bar{d}(q_2) R s(q_1)\ I(x)\right.$$

$$\left. + |V_i|^2\left(g_1(x)\frac{(q_2 - q_1)^\nu}{2} + g_2(x)\frac{(p_1 + q_2)^\nu}{2}\right)\left(\bar{d}(p_2) R s(p_1)\ \bar{d}(q_2)\gamma_\nu L s(q_1)\right)\right\} \qquad (10)$$

avec

$$\bar{I}(x) = -\frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1+x}{(1-x)^3}\log x$$

$$f_1(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\left(1/3 - \frac{3}{(1-x)} - \frac{1+2x}{(1-x)^2}\log x\right)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\left(1/2 + \frac{3x}{1-x} + \frac{x(2+x)}{(1-x)^2}\log x\right) \qquad (11)$$

$$x = \frac{m_t^2}{M_H^2}$$

B) Transitions $\Delta S = 1$

1) Cas de K.M

Ce sont les transitions responsables des désintégrations K

Ignorant les effets de QCD, on a dans le modèle K.M., et dans la limite $M_W^2 \gg m_q^2$, un opérateur local :

$$\mathcal{L}^{\Delta S=1} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\left[A_c O_c + A_t O_t\right] + h.c$$

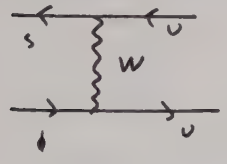
avec

$$A_c = s_1 c_2 \left(c_1 c_2 s_3 - e^{-i\delta} s_2 s_3\right)$$

$$A_t = s_1 s_2 \left(c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{-i\delta}\right)$$

$$O_q = (\bar{s}u)_{V-A}(\bar{u}d)_{V-A} - (u \to q)$$

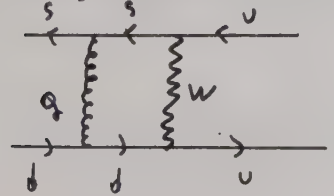
De tels termes sont obtenus au niveau en arbre par exemple :



que nous appellerons par la suite partie normale.

Quels sont les effets QCD?

Nous pouvons calculer la 1ère correction donnée par le diagramme suivant



Ce diagramme contient $\log \frac{M_W^2}{\mu^2}$; μ est le point de renormalisation qui sera pris à basse énergie (1 GeV), étant donné que l'on souhaite définir les quantités renormalisée à l'énergie où sera mesuré l'élément de matrice de $\mathcal{H}^{\Delta S=1}$. Or $M_W \sim 70$ GeV ainsi la présence d'une échelle de masse importante induit de grandes corrections . Il convient donc de sommer les termes dominants ($\text{Log} \frac{M_W^2}{\mu^2}$) à tous les ordres de la QCD.

Ce programme peut être réalisé par l'intermédiaire du Groupe de renormalisation.

Ecrivons $\mathcal{H}^{\Delta S=1}$ sous la forme non locale

$$\mathcal{H}^{\Delta S=1} = \int d^4x \; D_F(x^2, M_W^2)\, T\left(J_\mu(x) J^\mu(0)\right) \qquad (12)$$

La limite $M_W \gg$ extrait le terme $X \to 0$ de (12). Il faut donc calculer $J_\mu(x) J^\mu(0)$ quand $X \to 0$: c'est le développement de Wilson. Le produit $T(J_\mu(x) J^\mu(0))$ peut s'écrire, à tous les ordres ,

$$T\left(J_\mu(x) J^\mu(0)\right) \underset{x \to 0}{=} \sum_i C_i(x)\, O_i \qquad (13)$$

où O_i sont des opérateurs locaux ayant les mêmes nombres quantiques que $J_\mu J^\mu$

Soit d_i et d_j les dimensions naives de O_i et J_μ. A des puissances de Log x près $C_i(x) \sim (x)^{d_i - 2d_j}$

L'équation (13) est vraie au sens des fonctions de Green :

$$G_{J_\mu J^\mu}(\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n)) = \sum_i C_i(x)\, G_{O_i}(\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n)) \qquad (14)$$

où φ représente un champ externe. En prenant pour G_{JJ} l'élément de matrice de $\mathcal{H}_{\Delta S=1}$ entre états de quarks $s\bar{d}$ et $u\bar{u}$, $d\bar{d}$ soit à la fonction d'onde près, entre K_o et π , et en prenant la transformée de Fourier on obtient :

$$\langle K_o | \mathcal{H}^{\Delta S=1} | \pi \rangle = \sum_i C_i\left(\frac{M_W^2}{\mu^2}, g\right) \langle K_o | O_i | \pi \rangle (p^2, g, \mu) \qquad (15)$$

P^2 représente une impulsion externe.

(15) montre clairement la factorisation des effets de courtes distances. Au 1er ordre $C_i \sim \log \frac{M_W^2}{\mu^2}$. Pour resommer les termes dominants, utilisons le groupe de renormalisation. Dans la suite $\langle O \rangle$ représentera un élement de matrice de O.

$\langle \mathcal{L}^{\Delta S=1} \rangle$ est une quantité physique invariante du groupe de renormalisation soit :

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g}\right) \langle \mathcal{L}^{\Delta S=1} \rangle = 0 \qquad (16)$$

Les O_i sont des opérateurs qui peuvent se mélanger par renormalisation, soit

$O_i^0 = Z_{ij} O_j$.(O_i^0 opérateur nu).

Définissons

$$\gamma_{ij} = \left(\frac{1}{Z}\right)_{ik} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} Z_{kj}(\mu, g_0, \Lambda)$$

On a

$$\left[\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g}\right) \delta_{ij} + \gamma_{ij}\right] \langle O_j \rangle = 0 \qquad (17)$$

Combinons (15), (16) et (17) on obtient sans peine :

$$\left[\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g}\right) \delta_{ij} - \gamma_{ij}^T\right] C_j\left(\frac{k^2}{\mu^2}, g\right) = 0 \qquad (18)$$

Remarque : Il n'y a pas de terme $\frac{\partial}{\partial \lambda}$ (λ: paramètre de jauge) dans nos équations car nous travaillons en jauge de Landau. D'autre part nous utiliserons le schéma de soustraction minimale (M.S), en régularisation dimensionnelle, (voir appendice C) ce qui dispence du terme $\frac{\partial}{\partial \lambda}$ en toute jauge.

Dans le cas K.M, les opérateurs O_i peuvent être :

$$O_1 = (\bar{s}_i u_i)(\bar{u}_j d_j) - (u \leftrightarrow c)$$

$$O_2 = (\bar{s}_i u_j)(\bar{u}_j d_i) - (u \leftrightarrow c)$$

O_1 et O_2 forment un ensemble fermé par renormalisation et sont de dimension $d = 6$. A l'ordre d'une boucle, la partie divergente des opérateurs O_i s'écrit :

$$\delta O = \frac{2g^2}{16\pi^2} 2/\varepsilon \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} O \qquad O = \begin{pmatrix} O_1 \\ O_2 \end{pmatrix} \tag{19}$$

$\varepsilon = d - 4$ (voir appendice C).

Nous en déduirons les opérateurs $O^{\pm}$, propres par renormalisation

$$O^{\pm} = (\bar{s}_i u_i)(\bar{u}_j d_j) \pm (\bar{s}_i u_j)(\bar{u}_j d_i) - (u \leftrightarrow c) \tag{20}$$

dont la dimension anormale est :

$$\gamma_+ = \frac{g^2}{4\pi^2} \qquad \gamma_- = -\frac{g^2}{2\pi^2}. \tag{21}$$

La solution de l'équation (18) s'écrit alors :

$$C_{\pm}\left(\frac{k^2}{\mu^2}, g\right) = \exp\left[-\int_{g}^{\bar{g}(k^2)} \frac{\gamma^{\pm}(x)}{\beta(x)}\, dx\right] C_{\pm}(\mu^2 = k^2, \bar{g}(k^2)) \tag{22}$$

Nous utilisons maintenant la liberté asymptotique de QCD : $\bar{g}(k^2) \underset{k^2 \to \infty}{\to} 0$

le terme dominant de (22) est alors donné par

$C_{\pm}(k^2, \bar{g}(k^2)) = C_{\pm}(k^2, 0)$ et $\frac{\gamma}{\beta}$ peut être développé au 1er ordre en g

$$\beta(x) = -(33 - 2N_g)\frac{x^3}{48\pi^2} + O(x^5)$$

posons

$$\frac{2a^{\pm}}{x} = -\frac{\gamma^{\pm}(x)}{\beta(x)} \tag{23}$$

Soit

$$a^+ = \frac{6}{33 - 2N_g} \qquad a^- = \frac{-12}{33 - 2N_g}$$

et $C_\pm(k^2,0) = \frac{1}{2}$ (coefficient en théorie libre).

D'où

$$C_\pm\left(\frac{k^2}{\mu^2}, g\right) = \left(\frac{\alpha_s(k^2)}{\alpha_s(\mu^2)}\right)^{a^\pm}(1/2) \qquad (24)$$

Soit

$$\mathcal{H}^{\Delta S=1} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\left\{\left[\left(\frac{\alpha_s(M_W^2)}{\alpha_s(\mu^2)}\right)^{a^+} O_c^+ + \left(\frac{\alpha_s(M_W^2)}{\alpha_s(\mu^2)}\right)^{a^-} O_c^-\right] A_c + (t\text{-}c)\right\}$$

(25)

$\mathcal{H}^{\Delta S=1}$ contient des opérateurs possédant des champs lourds (t,c) sur leurs pattes externes. Cependant nous voulons calculer ses éléments de matrice entre particules légères (K.η) c'est à dire à basse énergie. Pour simplifier la discussion examinons le cas du quark C seulement; il nous faut calculer deux types d'élement de matrice :

$$\langle(\bar{s}u)(\bar{u}d)\rangle \qquad \langle(\bar{s}c)(\bar{c}d)\rangle$$

Pour le 1er, le théorème de découplage sapplique directement : le quark lourd n'intervient que par des boucles, son effet n'est alors sensible qu'à travers la renormalisation. Il est alors possible de définir une théorie effective à basse énergie, à 3 saveurs, avec une constante de couplage g'. Ecrivons

$$\langle O\rangle(m,\mu,g) = C\left(\frac{m}{\mu}, g\right)\langle O\rangle'(g',\mu) + O\left(\frac{1}{m^2}\right) \qquad (26)$$

$\langle O\rangle'$ signifie que le calcul doit être fait dans la théorie effective. On obtient aisément les équations du groupe de renormalisation :

$$\left.\begin{aligned}&\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta\frac{\partial}{\partial g} + \gamma_m m\frac{\partial}{\partial m} + \gamma_0(g) - \gamma_0'(g')\right) C\left(\frac{m}{\mu}, g\right) = 0\\ &\text{et}\\ &\beta'(g') = \left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta\frac{\partial}{\partial g} + \gamma_m m\frac{\partial}{\partial m}\right) g'\left(\frac{m}{\mu}, g\right)\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Ainsi le fait de corriger $\langle O_0 \rangle$ par sommation des termes $\log \frac{m_c}{\mu}$ modifie seulement son coefficient numérique. Par contre le traitement de $\langle (\bar{s}c)(\bar{c}d) \rangle$ est très différent :

Examinons le terme en g^2, donné par le diagramme :

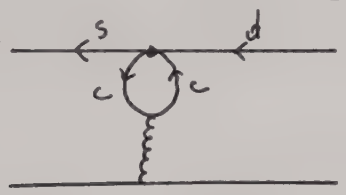


Fig 4

Ce graphe est appelé Pingouin; étant donné qu'il n'est apparament pas local, calculons l'amplitude associée à :

Fig 5

On trouve

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{\alpha_s(\mu^2)}{12\pi^2} \log \frac{m_c^2}{\mu^2} (\bar{s}\gamma_\mu \lambda^a d)(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \varepsilon_a^\nu \qquad (28)$$

etant donné la dépendance en k^2 dans (28), à cet ordre l'opérateur de la Fig. Figure 4 est local. Nous voyons apparaitre des "grands Log", $\log \frac{m_c^2}{\mu^2}$ qu'il s'agit de resommer par le groupe de renormalisation. Revenons aux opérateurs propres $O_c^\pm$ et dans l'esprit du théorème de découplage, écrivons :

$$\langle O_c^\pm \rangle (m, g, \mu) = \sum_i B_i^\pm \left(\frac{m_c}{\mu}, g\right) \langle Q_i \rangle' (\mu, g', m') + O\left(\frac{1}{m_c}\right) \qquad (29)$$

m désigne m_u, m_d, m_s, m_c

m' désigne m_u, m_d, m_s.

Ecrivons les équations

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} + \sum_{i=u-c} \gamma_i m_i \frac{\partial}{\partial m_i} + \gamma^\pm(g)\right) \langle O_c^\pm \rangle = 0$$

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g'} + \sum_{i=u-s} \gamma_i m_i \frac{\partial}{\partial m_i} + \gamma'_{ij}\right) \langle Q_i \rangle' = 0$$

On obtient une équation analogue à (27) :

$$\left[\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial g}+\gamma_c m_c\frac{\partial}{\partial m_c}+\gamma^{\pm}\right)\delta_{ij}-\gamma'^{T}_{ij}\right]B^{\pm}_i\left(\frac{m_c}{\mu},g\right)=0 \qquad (30)$$

Quels sont les opérateurs Q_i possibles? (de dimension 6 et ayant les mêmes nombres quantiques que $O^{\pm}_c$ et ne contenant que les trois quarks u,d,s et des gluons).
Un choix possible est :

$$Q_1=(\bar{s}_i u_j)(\bar{u}_j d_i)$$
$$Q_2=(\bar{s}_i u_i)(\bar{u}_j d_j)$$
$$Q=(\bar{s}\gamma_\mu L\lambda^a d)D_\nu F_a^{\mu\nu}$$

Q_2 se mélange avec Q par un pingouin avec u dans la boucle de quark.
Cependant nous pouvons appliquer l'équation du mouvement :

$$D_\nu F^{a\mu\nu}=g\sum_a\bar{q}\gamma_\mu\lambda^a q$$

On obtient ainsi un opérateur local à quatre quarks généralisant le diagramme de la figure 4. (Witten et Wise ont examiné diagrammatiquement, aux ordres supérieurs et aux termes dominants $\log\frac{m_c^2}{2}$, comment la localité était préservée quand on tient compte de tous les diagrammes).
On introduit alors des opérateurs Q_i ne contenant que des quarks :

$$Q_1=(\bar{s}_i u_j)(\bar{u}_j d_i)$$
$$Q_2=(\bar{s}_i u_i)(\bar{u}_j d_j)$$
$$Q_3=(\bar{s}_i d_i)_{V-A}\left(\sum_{uds}\bar{q}_j q_j\right)_{V-A} \qquad (31)$$
$$Q_4=(\bar{s}_i d_j)_{V-A}\left(\sum_{uds}\bar{q}_j q_i\right)_{V-A}$$

$$Q_5 = (\bar{s}_i d_i)_{V-A} \left(\sum \bar{q}_j q_j\right)_{V+A}$$

$$Q_6 = (\bar{s}_i d_j)_{V-A} \left(\sum \bar{q}_j q_i\right)_{V+A}$$

Ces opérateurs forment un ensemble fermé par renormalisation.
Diagonalisons γ_{ij}. Soit Q_i les opérateurs propres et $\tilde{C}_i$ les coefficients correspondants. La solution de (30) est donnée par :

$$\tilde{B}_i^{\pm}\left(\frac{m_c^2}{\mu^2}, g\right) = \left(\frac{\alpha_s(m_c^2)}{\alpha_s(\mu^2)}\right)^{-a^{\pm}} \left(\frac{\alpha_s(m_c^2)}{\alpha'_s(\mu^2)}\right)^{a'_i} \tilde{C}_i^{\pm}(\mu = m_c, \bar{g}) \qquad (32)$$

avec une définition modifiée de $\bar{g}(m_c)$:

$$\text{Log}\, y_g = \int_g^{\bar{g}(y_g, g)} \left(\frac{1 - \gamma_c(x)}{\beta(x)}\right) dx \qquad (33)$$

et les termes dominants sont donnés par

$$\tilde{C}^{\pm}(1, \bar{g}(m_c)) \simeq \tilde{C}^{\pm}(1, 0) \quad \text{(coefficient de la théorie libre).}$$

On a clairement :

$$C_1^{\pm}(1,0) = \pm 1 \qquad C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = 0 \qquad (34)$$
$$C_2^{\pm}(1,0) = 1$$

Ainsi les opérateurs Pingouins Q_i i=3 - 6 non présents dans la théorie libre sont générés par les corrections radiatives de O_1.

Dans le cas de modèle de KM, étant donné que l'on souhaite évaluer les effets de violation de CP, il est nécessaire d'introduire les 3 générations. Il faut ensuite appliquer le théorème de découplage successivement à t, b, c. Gilman et Wise ont suivi ce programme et obtenu :

$$\mathcal{H}^{\Delta S=1} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} s_1 c_1 c_3 \left[(-0,87 + 0,036 z) Q_1 + (1,51 - 0,036 z) Q_2\right.$$
$$\left. + (-0,021 - 0,012 z) Q_3 + (0,011 + 0,007 z) Q_5 + (-0,047 - 0,072 z) Q_6\right.$$

(35)

avec

$$\tau = s_2^2 + \frac{s_2 c_2 s_3}{c_1 c_3} e^{-i\delta}$$

Ces valeurs sont obtenues pour m_t = 15 GeV et μ = 1 GeV. Il faut remarquer que $\langle Q_i \rangle$ dépendent de μ, de façon à compenser la dépendance des coefficients en μ. μ doit être choisi de telle façon que le calcul en "Log" dominants soit exact pour $\alpha(\mu)$, donc suffisamment élevé et d'autre part suffisamment bas pour intégrer dans les C_i les effets de gluons durs

Dans l'article suivant le cas de $\mathcal{L}^-_{\Delta S=1}$ dans le modèle de Weinberg est traité de la façon expliquée ci-dessus. Les opérateurs n'ayant pas la structure V-A x V-A, le nombre d'opérateurs qui se mélangent par renormalisation est plus élevé. Aussi, afin de donner des expressions analytiques, certaines approximations, consistant à négliger les opérateurs n'apparaissant ni dans la théorie libre, ni dans le Lagrangien final. Il n'y a pas de preuve rigoureuse pour justifier ces approximations, cependant, dans un cas analogue au nôtre, il a été vérifié par un calcul numérique qu'il s'agit d'une très bonne approximation. Comme dans le cas standard, un opérateur du type Pingouin est généré par les interactions fortes, mais de façon différente, et ses corrections radiatives sont calculées.

EFFECTIVE LAGRANGIAN FOR $\Delta S = 1$ AND $\Delta S = 2$ TRANSITION IN THE HIGGS BOSON EXCHANGE MODEL OF CP VIOLATION

Y. DUPONT

Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau - 91128 Palaiseau Cedex - France -

Abstract : Using standard renormalization group technique, strong interaction corrections to $\Delta S = 1$ and $\Delta S = 2$ transitions are calculated in the Higgs-boson exchange model of CP violation. It is shown that the box diagramm contribution to the ratio ε'/ε is not modified in any significant way with respect to lowest order calculation.

A535.1282 Décembre 1982

Within gauge theory of weak interaction, Weinberg's model[1] of CP violation is a possible alternative to the Kobayashi Maskawa (KM) 6 - quark model[2], if there is more than three Higgs doublets. Apart from a large neutron-electric dipole moment of the order $10^{-25\pm2}$ e cm,[1,3] another important physical consequence is the relative importance of the $\Delta S = 1$ transition over $\Delta S = 2$ transition measured by the ratio ε'/ε.

To lowest order in strong interaction the $\Delta S = 1$ transition is governed by penguin-type operator (Fig. 1) and is enhanced by a factor $\ell n \frac{m_H^2}{m_c^2}$ relative to the $\Delta S = 2$ transition resulting in a large valvue for ε'/ε in conflict with experiment.[4,5,6] This may be not a serious difficulty since the dispersive contributions, due to the mixing of K^o with the low-lying pseudo-scalar meson octet (π^o, η, η'), can enhance $\Delta S = 2$ transition and produce a value for ε'/ε compatible with presently available data, as pointed out recently[7].

Another problem is the neglecting QCD corrections to lowest order calculation. It is expected that such corrections should not appreciably modify the lowest order result, but a careful evaluation of this is desirable.

The purpose of this paper is to compute QCD corrections to all

order in leading logarithmic approximation, following the programm of Gilman and Wise[8,9]. As in the standart K M model, penguin-type operators[8,10] are generated by QCD corrections to the effective lagrangian due to Higgs exchange, when Higgs boson and c quark are successively considered as heavy and removed from the theory.

Corrections to $\Delta S = 2$ effective lagrangian are also evaluated. We find that the ratio ε'/ε is enhanced by a factor 2 compared to the lowest order result of the box diagram.

In Weinberg's model, two charged Higgs-bosons H_i^+ are coupled to fermions with complex Yukawa coupling defined[3,4] as

$$L_y = \frac{2^{3/4} G_F}{2} \sum_i (\bar{P} K M_N L N U_i + \bar{P} M_p R N V_i) H_i^+ + h.c \qquad (1)$$

with $\underset{(R)}{L} = 1 \mp \gamma_5$ $\quad P = \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}$ $\quad N = \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$ and K the cabibbo matrix.

$M_{N,(P)}$ are the mass matrix of N,(P) quarks

In the following, we set $m_u = m_d = 0$. U_i and V_i are given in terms of the various angles and phases of the Higgs mixing matrix.

In order to simplify computations we work in the case $M_{H_1} \ll M_{H_2}$.

In the free-quark model, the $\Delta S = 1$ CP violation lagrangian is given by :

$$\begin{aligned} L_-^{\Delta S = 1} &= f m_s m_c (\bar{s}_i R c_i)(\bar{c}_j R d_j). \\ f &= G_F \frac{2^{3/2}}{4} \frac{\mathrm{Im}\, U_i^* V_i}{M_H^2} \cos\theta_c \sin\theta_c \end{aligned} \qquad (2)$$

Strong interaction modify this result in the following way : First we consider the H_1^+ boson as much heavier than the other mass scale in the

problem. Using operator product expansion[11], we have to leading order in the heavy H_i^+ mass, M_H :

$$i \int d^4x\, D_F(x^2, M_H^2)\, T(L_y(0)\, L_y(x))_{\substack{CP=-1 \\ \Delta S=1}} = f\, m_s\, m_c \sum_i C_i \left(\frac{M_H^2}{\mu^2}, g \right) O_i \tag{3}$$

We use the mass independent minimal subtraction scheme[12], for which the renormalization - group equations[13] for the c_i are :

$$\left[\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right) \delta_{ij} - \gamma^T_{ij}(g) \right] C_j \left(\frac{M_H^2}{\mu^2}, g \right) = 0 \tag{4}$$

γ_{ij} is the anomalous dimension of the operators $m_s m_c O_i$ because the left hand side of Eq.(3) has no anomalous dimension. The operators od dimension 6 that can appear in Eq.(3) are :

$$\begin{aligned}
O_1 &= (\bar{s}_c R c_i)(\bar{c}_j R d_j) \\
O_2 &= (\bar{s}_i R c_j)(\bar{c}_j R d_i) \\
O_3 &= \frac{m_c}{g}(\bar{s}\, \sigma_{\mu\nu} R \lambda^a d)\, F^{a\mu\nu} \\
O_4 &= (\bar{s}_i\, \sigma_{\mu\nu} R c_i)(\bar{c}_j\, \sigma^{\mu\nu} R d_i) \\
O_5 &= (\bar{s}_i\, \sigma_{\mu\nu} R c_j)(\bar{c}_j\, \sigma^{\mu\nu} R d_i)
\end{aligned} \tag{5}$$

These operators are closed under renormalization. Note the difference with the standard model where mixing between three operators like O_1, O_2 and penguin is forbidden by GIM mecanisms[14]. The factor $1/g$ is inserted into O_3 so that, to lowest order the γ matrix has all its elements of order g^2. Introducing $\tilde{C}_j = \sum_i \alpha_{ji} C_i$ which corresponds to multiplicatively renormalizable operators, with anomalous dimension γ_j, the solution of Eq.(3) is

given by :

$$\tilde{C}_j\left(\frac{M_H^2}{\mu^2}, g\right) = \exp\left[-\int_g^{\bar{g}\left(\frac{M_H}{\mu}, g\right)} \frac{\gamma_j(x)}{\beta(x)} dx\right] \tilde{C}_j\left[1, \bar{g}\left(\frac{M_H}{\mu}, g\right)\right] \qquad (6)$$

with the running coupling constant defined by :

$$\ell n\, y = \int_g^{\bar{g}(y,g)} \frac{dx}{\beta(x)}$$

We use asymptotic freedom of QCD to replace $\tilde{C}_j(1,\bar{g})$ by its freefield value $\tilde{C}_j(1,0)$.

Comparing with Eq.(2) we have :

$$C_1(1,0) = 1 \qquad C_2(1,0) = C_4(1,0) = C_5(1,0) = 0 \qquad (7)$$

$C_3(1,0)$ is more difficult to obtain since O_3 contain a factor $1/g$. If we neglect q^2 compared to M_H^2, where q is the gluon momentum, we have :

$$C_3\left(\frac{M_H}{\mu} = 1, \bar{g}\right) \sim \bar{g}^{-2}(M_H, g)\ \ell n\, \frac{M_H^2}{\mu^2}\bigg|_{M_H = \mu} + O(\bar{g}^{-4}) = 0 \qquad (8)$$

With these five operators, an analytic expression for $L^-_{\Delta S = 1}$ cannot be given readily. We shall see that at the stage of removing the c - quark, only O_3 survives and that other operators are without effects. Then only O_1 (because $C_1(1,0) = 1$) and O_3 are the remaining dominant operator for $\Delta S = 1$ transition. The other operators will only give small corrections to the coefficient of O_3. Thus to a good approximation the set of five operators can be reduced to O_1 and O_3[15]. At the one loop level the divergent part of O_1 and O_3 is given by diagrams of Fig. 3 taking into account

mass and coupling constant renormalization for O_3, and can be written, in the Landau gauge :

$$\delta \begin{pmatrix} O_1 \\ O_3 \end{pmatrix} = \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 16 & 1 \\ 0 & -\frac{15}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_1 \\ O_3 \end{pmatrix} + O(g^4) \qquad (9)$$

Then the operators $m_s m_c P_1 = m_s m_c (O_1 + \frac{6}{111} O_3)$ and $m_s m_c P_3 = m_s m_c O_3$, are multiplicatively renormalizable with anomalous dimension :

$$\gamma_1 = -\frac{g^2}{\pi^2} + \frac{g^2}{\pi^2} \quad \gamma_3 = \frac{g^2}{4\pi^2}\left(\frac{15}{24}\right) + \frac{g^2}{\pi^2} \qquad (10)$$

The function $\beta(g)$ has the following perturbative expansion in the case of four flavors[16] :

$$\beta(g) = -\frac{25}{48\pi^2} g^3 + O(g^5)$$

Then

$$-\frac{\gamma_i(x)}{\beta_i(x)} = \frac{2a_i}{x} + \text{terms finite at } x = 0 \qquad (11)$$

with $a_1 = -\frac{24}{25} + 2\times\frac{12}{25}$, $a_3 = +\frac{3}{20} + 2\times\frac{12}{25}$

Using (6) (7) (8), (11) we obtain :

$$L_-^{\Delta S=1} = f m_s m_c \left(\frac{\alpha(M_H^2)}{\alpha(\mu^2)}\right)^{\frac{24}{25}} \left[\left(\frac{\alpha(M_H^2)}{\alpha(\mu^2)}\right)^{-\frac{24}{25}} P_1 - \frac{6}{111}\left(\frac{\alpha(M_H^2)}{\alpha(\mu^2)}\right)^{\frac{3}{20}} P_3\right] \qquad (12)$$

The next step is to remove c-quark from the theory, considering m_c much heavier than other mass scales. Since matrix elements of $L^-_{\Delta S=1}$ are taken between light particles (e.g π,K) the c-quark appear only in loops and

the decoupling theorem[17] tell us that to leading order in m_c, m_c can be absorbed in renormalization effects[18] :

$$m_s m_c <|P_i|> = \sum_j L_i^j(\frac{m_c}{\mu}, g)\ m_c m_s <|Q_i|> + O(\frac{1}{m_c}) \qquad (13)$$

The new matrix element (denoted by a prime) must be evaluated to all orders in an effective theory of strong interactions with 3 flavours[19]. Q_j must contain only, u,d,s, fields, then the only effective operator is Q_3 given by

$$Q_3' = m_c Q_3 = m_c(\bar{s}\, i\sigma_{\mu\nu}\lambda^a R d)F^{a\mu\nu} \qquad (14)$$

Then

$$m_s m_c <|P_i|> = m_c^2 L_i(\frac{m_c}{\mu}, g) <m_s Q_3> \qquad (15)$$

and $m_c^2 L_i$ obey a renormalization group equation :

$$(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + m_c\gamma_m\frac{\partial}{\partial m_c} + \gamma_i - \gamma_m - \gamma_3'(g'))\ m_c^2 L_i(\frac{m_c}{\mu}, g) = 0 \qquad (16)$$

where γ_i and γ_3' are respectively the anomalous dimensions of P_i and Q_3.

$$\gamma_3' = \frac{g'^2}{4\pi^2}\ \frac{13}{24} + O(g'^4) \qquad (17)$$

At the end of computations the mass m_c that appear must be a physical quantity m_c^* (renormalization group invariant). We can write $m_c = m_c^* S(\frac{m_c}{\mu}, g)$ and absorbe[18] S in the definition of L_i obtaining for L_i the same

equation as (16). The solution of (16) is, as usual :

$$L_i(\frac{m_c}{\mu}, g) = \exp(\int_g^{\bar{g}(m_c,g)} (\frac{\gamma_i - \gamma_m}{\beta})dx) \exp(\int_{g'}^{\bar{g}'(m_c,g')} (-\frac{\gamma_3'}{\beta'})dx) L_i(1,\bar{g}(m_c)) \tag{17}$$

With the running coupling constant defined by :

$$\ell n\, y = \int_g^{\bar{g}(y,g)} \left(\frac{1 - \gamma_m(x)}{\beta(x)} \right) dx$$

and β' is the β function in the effective theory with 3 flavours and coupling g'.

We write

$$-\frac{\gamma_3'(x)}{\beta'(x)} = \frac{2a'_3}{x} + \ldots\ldots \tag{18}$$

and using $g'(\frac{m_c}{\mu} = 1, \bar{g}) = \bar{g}(\frac{m_c}{\mu}, g)$ which is valid in leading logarithmic approximation, we have :

$$L_i(\frac{m_c}{\mu}, g) = \left(\frac{\alpha(m_c^2)}{\alpha(\mu^2)} \right)^{-\frac{12}{25}} \left(\frac{\alpha(m_c^2)}{\alpha(\mu^2)} \right)^{-a_i} \left(\frac{\alpha(m_c^2)}{\alpha'(\mu^2)} \right)^{a'_3} L_i(1,\bar{g}(\frac{m_c}{\mu}, g)) \tag{19}$$

and

$$L_1(1,\bar{g}) = \frac{6}{111} \frac{1}{\bar{g}(m_c)} + O(\bar{g})$$

$$L_3(1,\bar{g}) = \frac{1}{\bar{g}(m_c)} + O(\bar{g}) \tag{20}$$

Note that O_1 as well as O_2, O_4, O_5 have no effects on $L_i(1,\bar{g})$ to leading order, not because $\bar{g}(m)$ is small but as a consequence of the vanishing of

these coefficients evaluated at $\mu = m_c$.

In fact O_1 will give a contribution to $L_1(1,\bar{g})$ of the form :

$$L_1' \alpha \bar{g}(m_c,g) \ln\left(\frac{m_c^2 + q^2}{\mu^2}\right)\Bigg|_{\mu = m_c} + O(\bar{g}^3) \qquad (21)$$

The must important contribution to K - π transition is given by soft gluon effects, then $q^2 << m_c^2$ and $L_1'(1,\bar{g}) = 0$ to a good approximation.

Then the final result is :

$$L^-_{\Delta S=1} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{Im} U_1^* V_1}{M_H^2} \sin\theta_c \cos\theta_c \frac{m_c^{*2}}{g(m_c)} (K_H)^{\frac{12}{25}} (K_c)^{-\frac{13}{108}} \frac{6}{111}\left(K_H^{-\frac{24}{25}} - K_H^{3/20}\right)$$

$$\times m_s^* \bar{s} i \sigma_{\mu\nu} \lambda^a R d F^{a\mu\nu} \qquad (22)$$

with $K_H = \dfrac{\alpha(M_H^2)}{\alpha(m_c^2)}$ $K_c = \dfrac{\alpha(m_c^2)}{\alpha'(\mu^2)}$ $m_s^* = m_s\left(\dfrac{\alpha(M_H^2)}{\alpha(\mu^2)}\right)^{\frac{12}{25}}$

Expanding (22) in power of $\bar{g}(m_c)$ to the first order, we find the dominant term of lowest order calculation :

$$L^-_{\Delta S=1} = \frac{G_F}{32\pi^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{Im} U_1^* V_1}{M_H^2} \sin\theta_c \cos\theta_c m_c^{*2} m_s^* \bar{g}(m_c) \ln\frac{M_H^2}{m_c^2}$$

$$\times \bar{s} i \sigma_{\mu\nu} \lambda^a R d F^{a\mu\nu} + O(\bar{g}^3) \qquad (23)$$

which can be compared to lowest order result[4], where $\ln \dfrac{M_H^2}{m_c^2}$ in (23) is replaced by $(\ln \dfrac{M_H^2}{m_c^2} - \dfrac{3}{2})$. It is not surprising to see that only ln terms are present in (23) since the term $(-\frac{3}{2})$ cannot be obtained with the renormalization group technique.

Numerical computation can be made, using

$$d(q^2) = \frac{12\pi}{25 \ell n Q^2/\Lambda^2} \quad \text{and} \quad \alpha'(\mu') = \frac{12\pi}{27 \ell n Q^2/\Lambda'^2}$$

and $\alpha(m_c^2) = \alpha'(m_c^2)$ $\quad \Lambda \simeq 0.2$ GeV.

Note that the matix element of Q_3 is μ - dependent in order to make $< K |L^-| \pi >$ μ - independent. To compute the coefficient of Q_3(Eq.(22)) we can choose μ to close a typical hadron mass scale which corresponds to setting $\alpha(\mu') = 1$ with $m_c = 2$GeV , we obtain

$$L'_{\Delta S=1} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sin\theta_c \cos\theta_c \ \mathrm{Im} U_1^* V_1 \frac{m_c^{*2} m_s^*}{M_H^2} \ C_3 \bar{s} i \sigma_{\mu\nu} \lambda^a R d F^{a\mu\nu} \qquad (24)$$

$C_3 = 0.016.$

To lowest order C_3 become $C_3' = 0.01$

We now give an estimate of QCD corrections to the $\Delta S = 2$ CP-violating Lagrangian, $L^-_{\Delta S = 2}$. In the free-quark model $L^-_{\Delta S=2}$ is given by the usual exchange as :

$$L^-_{o\Delta S=2} = m_c \tilde{g} (\bar{s}_i(P_2) \ \gamma_\mu \gamma_\nu R d_i(P_1) \ (\bar{s}_j(q_2) \ \gamma^\mu L d_j(q_1))(q_1 - P_2)^\nu + h.c \qquad (25)$$

$$\tilde{g} = \frac{G_F^2}{32\pi^2} \mathrm{Im} \ U_1^* V_1 \quad \frac{m_c m_s}{M_H^2} \quad (\cos\theta_c \ \sin\theta_c)^2.$$

This is the contribution of box diagram (Fig. 4) when M_H, $M_W >> m_c$. When M_H and M_W are considered as heavy, the leading contribution (Fig.4) is :

$$L^{-}_{\Delta S=2} = \tilde{g} \int d^4 x\, T[O^{W}_{cc}(x)\, O^{H}_{cc}(0) - O^{W}_{uc}(x)\, O^{H}_{uc}(0)] \qquad (26)$$

with

$$\tilde{g} = \frac{G_F^2}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{m_c m_s}{M_H^2} \cos^2\theta_c \sin^2\theta_c \ \mathrm{Im}\ U_1^{*} V_1$$

and

$$O^{W}_{qq'} = (\bar{s}_i \gamma_\mu L q_i)\ (\bar{q}'_j \gamma_\mu L d_j)$$
$$O^{H}_{qq'} = (s_i\, R\, q_i)\ (\bar{q}'_j\, R\, d_j) \qquad (27)$$

In order to introduce strong interaction, it is convenient to decompose $L^{-}_{\Delta S=2}$ in parts which don't mix under renormalization for $O^{W}_{qq'}$ operators, we introduce[20]

$$O^{\pm}_{qq'} = (\bar{s}_i \gamma_\mu L q_i)(\bar{q}'_j \gamma_\mu L d_j) \pm (\bar{s}_i \gamma_\mu L q_j)(\bar{q}'_j \gamma_\mu L d_i))$$

with anomalous dimension :

$$\gamma_+ = \frac{g^2}{4\pi^2} + O(g^4) \qquad \gamma_- = -\frac{g^2}{2\pi^2} + O(g^4) \qquad (28)$$

For $O^{H}_{qq'}$ we must introduce a set of operators like (5). But the O_i's, $(i = 3,4,5)$ have zero coefficients in the free quark lagrangian, then their coefficients in $L^{-}_{\Delta S=2}$ are expected to be small. Their contributions to $L^{-}_{\Delta S=2}$ (after integration over the quark loop) are of the form :

$$(\bar{s}\ \gamma_\mu\ \gamma_\nu\, R d)\ q^{\gamma}(\bar{s}\ \gamma_\mu L d) \quad \text{or} \quad (\bar{s}\ \sigma_{\mu\nu}\, R d)\ (\bar{s}\ \sigma^{\mu\nu}\, R d)$$

such operators have matrix elements of the same order as for Q = $Q = (\bar{s}\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,R\,d)\,(\bar{s}\,\gamma^\mu L\,d)\,q^\nu$ which appear in L_o, and bearing in mind that their coefficients are small, we can neglect it.

To be consistent, we need to consider only O_1 and O_2. O_1 is multiplicatively renormalizable with anomalous dimension $\gamma_1 = \frac{g^2}{\pi^2}$, and O_2 having a zero coefficient in the free thoery, it does not appear at this stage.

In the final stage of removing the c-quark, one generates the operator Q, which can mixed with other operators.

Let us decompose Q as

$$Q = (\bar{s}_i\,R\,d_j)(\bar{s}_j(P_1)\,\not{q}\,L\,d_i(P_2)) + (\bar{s}_i\,i\sigma_{\mu\nu}\,R\,d_j)\,(\bar{s}_j\,\gamma^\mu L\,d_i)q^\nu + h.c. \tag{29}$$

with $q = P_1 - P_2$.

Making use of equations of motion, and setting md = 0, we obtain the following dominant operator[21]:

$$m_s\,Q_2 = m_s(\bar{s}_i\,R\,d_j)(\bar{s}_j\,R\,d_i) + h.c.$$

Q_2 is the operator appearing in the free quark model. But the operator

$Q_1 = m_s(\bar{s}_i\,R\,d_i)(\bar{s}_j\,R\,d_j) + h.c.$ which mixes with Q_2 can also be generated by $T((O_W^+ - O_W^-)(x)\;O_1(0))$.

The operators Q_1 and $Q_2 - \frac{Q_1}{3}$ are multiplicatively renomalizable with anomalous dimension $\gamma_1 = -\frac{g^2}{\pi^2}$, $\gamma_2 = \frac{g^2}{8\pi^2}$.

Then using standard method, we find :

$$L^{-}_{\Delta S=2} = \frac{G_F^2}{32\pi^2} \, \mathrm{Im}\, U_1^{*} V_1 \, \frac{m_c^{*2}}{M_H^2} \; m_s^{*} \quad (\cos\theta_c \sin\theta_c)^2 \, \frac{1}{2} \, K_H^{a_1} \left[K_W^{a^+} + K_W^{a^-} \right] K_c^{a'_2} \, Q_2$$

$$+ \frac{Q_1}{3} \left(- K_c^{a'_2} (K_W^{a^+} + K_W^{a^-}) + 2K_c^{a'_1} (2K_W^{a^+} - K_W^{a^-}) \right] \qquad (31)$$

with $\quad a^+ = \frac{6}{25} \quad a^- = -\frac{12}{25} \quad a'_1 = \frac{3}{27} \quad a'_2 = -\frac{24}{27} \quad a_1 = -\frac{24}{25}$

Or numerically :

$$L^{-}_{\Delta S= 2} = \frac{G_F^2}{32\pi^2} \, \mathrm{Im}\, U_1^{*} V_1 \, \frac{m_c^{*2}}{M_H^2} \; m_s^{*2} (\cos\theta_c \sin\theta_c)^2 \, (C_2 Q_2 + C_1 Q_1)$$

$C_2 = 3.28$ (32)

$C_1 = - 1.09$

Using the above effective Lagrangian ε_m/ξ in the Higgs-boson exchange model. This ratio is given by[8] :

$$\frac{\varepsilon_m}{\xi} = \frac{\langle \pi_o \, | L_+ | \, \overline{K}_o \rangle}{\langle K_o \, | L_+ | \, \overline{K}_o \rangle} \times \frac{\langle K_o \, | L_- | \, \overline{K}_o \rangle}{\langle \pi_o \, | L_- | \, \overline{K}_o \rangle} \qquad (33)$$

from which $\quad \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = -\left(\frac{1}{20} \right) \frac{2\xi}{\varepsilon_m + 2\xi}$

Using the vacuum insertion method, we find

$$\langle K_o \, | Q_1 | \, \overline{K}_o \rangle = \frac{1/3 + \frac{m_K^2}{m_s^2}}{1 + 1/3 \, \frac{m_K^2}{m_s^2}} \langle K_o \, | Q_2 | \, \overline{K}_o \rangle$$

Then

$$\langle K_o \, | L_- | \, \overline{K}_o \rangle = 0.83 \, \langle K_o \, | L_-^o | \, K_o \rangle \qquad (34)$$

where L_-^o is the free $\Delta S = 2$ lagrangian.

Using (24), we find

$$\frac{\xi}{\varepsilon_m} = 1.92 \left(\frac{\xi}{\varepsilon_m} \right)_{\text{lowest order}} \tag{35}$$

In this paper we have seen how the $\Delta S = 1$ penguin type operator is generated by QCD interactions as well as higher order QCD effects are taken into account for both $\Delta S = 2$ and $\Delta S = 1$ operators in a simple manner using the standard renormalization group technique and the decoupling theorem.
As a result, QCD effects increase the ratio $\varepsilon/\varepsilon_m$ relative to the lowest order result by a factor of 2 which does not change in any significant way the previous estimates of ε'/ε.

ACKNOWLEDGEMENT

I would like to thank T. N. Pham for useful comments and suggestions. Thanks are also due to Tran N. Truong for his interest in this work.

REFERENCES

[1] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 31 (1976) 657.

[2] M. Kobayachi and K. Maskawa, Prog. Theor. Phys. 49 (1973) 652.

[3] C. Albright, I. Smith, S.M.H. Tye, Phys. Rev. D21 (1980) 711.

[4] I.F. Donoghue, I.S. Hagelin, Barry R. Holstein, Phys. Rev. D25(1982) 195.

[5] A. Sanda, Phys. Rev. D23 (1981) 2647.

[6] N. Deshpande, Phys. Rev. D23 (1981) 2654

[7] Y. Dupont, T.N. Pham, preprint Ecole Polytechnique , A498 0482
John S. Hagelin, Phys. Lett. 117B (1982) 441.

[8] F.J. Gilman and M.B. Wise, Phys. Rev. D20 (1979) 2392.

[9] F.J. Gilman and M.B. Wise, Phys. Lett. 93B (1980) 129.
and also preprint SLAC Pub. 2940, June 1982.

[10] A.F. Vainstein, V.I. Zakharov and M.K. Shifman, Nucl. Phys. B120 (1977) 315.

[11] K.G. Wilson, Phys. Rev. 179 (1963) 1799.

[12] S. Weinberg, Phys. Rev. D8 (1975) 3497.
G. t'Hooft, Nucl. Phys. B61 (1977) 1541.

[13] C.G. Callan, Phys. Rev. D2 (1970) 1541.
K. Symanzik, Comm. Math. Phys. 18 (1970) 227.

[14] S.L. Glashow, J. Illiopoulos, L. Mainni, Phys. Rev. D2 (1970) 1285.

[15] A similar approximation is made in ref. [9] . It is shown by explicit computation that this approximation is valid.

[16] D.J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1343
H.D. Polizer, Ibid. 30 (1973) 1346.

[17] T. Appelquist and J. Carrazone, Phys. Rev. D11 (1975) 2856.

[18] E. Witten, Nucl. Phys. B122 (1977) 109.

[19] See Ref. 18 and also E. Witten, NucL. Phys. B104 (1976) 449.

[20] M.K. Gaillard and B. W. Lee, Phys. Rev. Lett. 33 (1971) 108.
G. Altarelli and L. Maianni, Phys. Lett. 52B (1974) 521.

[21] In the vacuum insertion method, $m_s Q_2$ has the same matrix element as Q
See D. Chang, Phys. Rev. D25 (1982) 1318.

FIGURE CAPTIONS

Figure 1 : Penguin CP violation operators

1 a : $S \to d$ gluon, local operator

1 b : $\Delta S = 1$ Transition non-local

Figure 2 : Standard Penguin operator

Figure 3 : ■ stand for O_i and for O_3

shoded lines are Higgs propagator, bubled one, gluon operator.

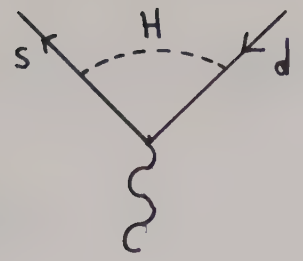


Fig. 1 a

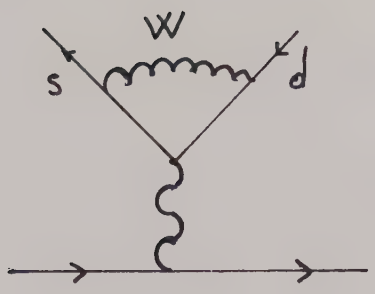


Fig. 2.

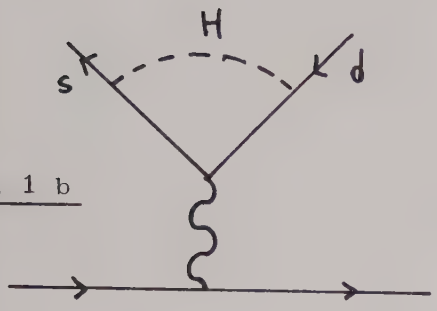


Fig. 1 b

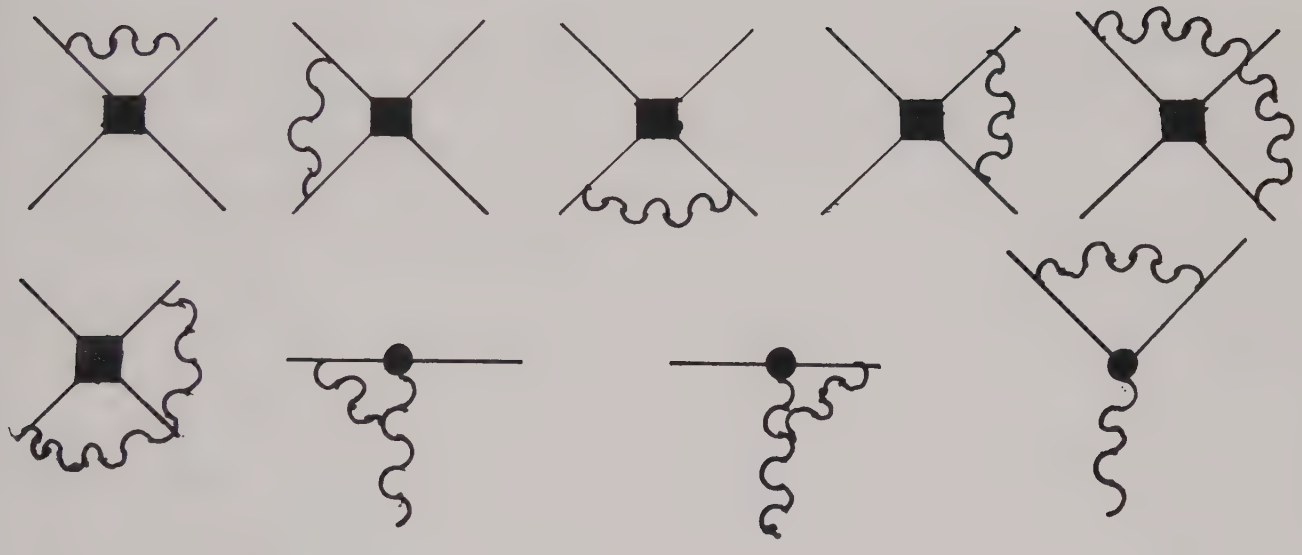


Fig. 3

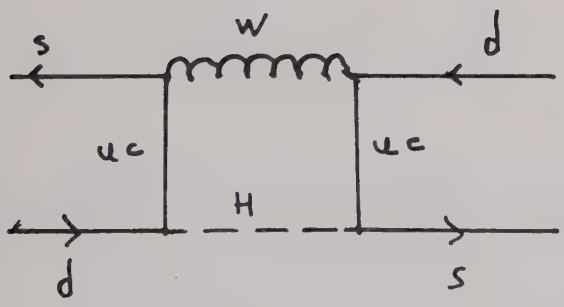


Fig. 4

C) Lagrangiens phénoménologiques [11]

Il sera utile par la suite de considérer des modèles d'interaction faible où interviennent directement les champs de particules physiques. Bien sûr de tels lagrangien ne sont pas nécessairement renormalisables car il représente une approximation du lagnrangien QCD dans la région de basse énergie. Nous imposerons que les champs obeissent à des représentations du groupe chiral $G = SU(3) \otimes SU(3)$, que les courants V^i et A^i déduits du lagrangien aient les relations de commutation de l'algèbre des courants et que PCAC soit respectée. Ce modèle nous sera très utile pour déduire les propriétés chirales des amplitudes.

1) L'approximation phénoménologique

Soit un lagrangien $\mathcal{L}(\phi)$ et considérons $\mathcal{L}(a, \phi) = \frac{1}{a^2} \mathcal{L}(a\phi)$
Considérons un diagramme de Feynman à I lignes internes, L boucles, E lignes externes, et N_i lignes attachées au i^{eme} vertex
La puissance de a est $P = \sum_{i=1}^{V} (N_i - 2)$
or on a les relations habituelles

$$\sum_{i=1}^{V} N_i = E + 2I \qquad (36)$$

$L = I - V + 1$
On en déduit $P = E + 2L - 2$.
Ainsi pour un nombre E fixe le terme dominant en a est donné pour L = 0, soit l'approximation en arbre.
En fonction de a les relations PCAC seront du type :

$$\partial A(\phi, a) = c/a\, \phi \qquad (37)$$

L'algèbre des courants consiste à utiliser les relations de commutations induits par G, (37) et les formules de réduction. Or, étant donné la construction du lagrangien, les solutions exactes de la théorie ont les propriétés de l'algèbre des courants. Etant donné les relations (36) et (37), nous constatons facilement que chaque ordre en a a ces mêmes

propriétés. En particulier les amplitudes physiques calculées au niveau des arbres (approximation phénoménologique) contiennent toute l'information sur la structure chirale.
Il est aisé de construire un lagrangien libre qui reproduise l'algèbre des courants. Pour obtenir un lagrangien complet il est utile de considérer les représentations non-linéaires (ou réalisations) du groupe G.

2) Réalisation d'un groupe

Soit un G un groupe et H un sous groupe.
Les réalisations de G sont contraintes à se représenter linéairement sur H.

Soit $Alg(H) = V_1, V_2 \cdots V_i$

$Alg(G) = \{V_a, A_a\}$

les générateurs étant choisis orthogonaux.
Dans un voisinage de l'identité, $\forall g \in G \quad g = e^{\xi A} e^{\eta V}$
Soit ξ donné, introduisons ξ', η' :

$$g e^{\xi A} = e^{\xi' A} e^{\eta' V} \qquad (g e^{\xi A} \in G) \tag{38}$$

Introduisons une représentation linéaire $D(h)$ de H. On peut alors définir une rélisation de G par :

$$T_g \xi = \xi'$$
$$T_g \psi = \psi' = D(e^{\eta' V})\psi \tag{39}$$

avec $g e^{\xi A} = e^{\xi' A} e^{\eta' V}$

C'est bien une réalisation de G (i.e. : $T_{g_1} T_{g_2} \xi = T_{g_1 g_2} \xi$
Remarque : Si $g \in H \quad g e^{\xi A} = g e^{\xi A} g^{-1} g$
Or les générateurs étant orthogonaux on en déduit

$$e^{\eta' V} = g$$

$$g\, e^{\xi A}\, g^{-1} = e^{\xi' A}$$

ξ se transforme alors linéairement selon G. (Représentation adjointe) et Ψ selon D : $\Psi' = D(h)\Psi$

Nous souhaitons construire un lagrangien invariant, dépendant des ξ , Ψ soit $L(\xi, \Psi, \partial_\mu \xi, \partial_\mu \Psi)$

Dans le cas $G = SU(3) \otimes SU(3)$ $H = SU(3)$, est la représentation adjointe par rapport à M, soit $\underline{8}$: c'est l'octet des peudoscalaires, représentant les baryons. L sera invariant si

$$L(\xi, \Psi, \partial_\mu \xi, \partial_\mu \Psi) = L(T_g \xi, T_g \Psi, T_g \partial_\mu \xi, T_g \partial_\mu \Psi)$$

étant donné ξ , définissons g_o :

$$g_o = e^{+\xi A} \qquad \text{alors} \qquad g_o e^{-\xi A} = \mathbb{1}$$

Donc

$$\xi' = T_{g_o} \xi = 0$$

$$\Psi' = T_{g_o} \Psi = \Psi$$

Définissons les dérivées covariantes :

$$\nabla_\mu \xi = T_{g_o}(\partial_\mu \xi)$$

$$\nabla_\mu \Psi = T_{g_o}(\partial_\mu \Psi) \qquad (40)$$

Donc si $\mathcal{L}$ est invariant par G on aura :

$$\mathcal{L}(\xi, \Psi, \partial_\mu \xi, \partial_\mu \Psi) = \mathcal{L}(0, \Psi, \nabla_\mu \xi, \nabla_\mu \Psi)$$

D'où un algorithme pour construire $\mathcal{L}$: construire le lagrangien invariant par rapport à H le plus général en fonction de ψ, $\partial_\mu \xi$, $\partial_\mu \psi$ et remplacer les dérivées par les dérivées covariantes.

Calculons les dérivées covariantes :

$$\partial_\mu g_0 e^{\xi A} = (\partial_\mu e^{\xi' A}) e^{\eta' V} + e^{\xi' A} (\partial_\mu e^{\eta' V}) \tag{41}$$

de même

$$\partial_\mu \psi' = e^{\eta' T} \partial_\mu \psi + (\partial_\mu e^{\eta' T}) \psi$$

avec T_a générateurs de H sur D(H)

$\xi' = 0 \quad \eta' = 0$

Donc

$$\partial_\mu e^{\xi' A} = \partial_\mu \xi' . A$$

$$\partial_\mu e^{\eta' V} = \partial_\mu \eta' . V$$

On obtient donc

$$e^{-\xi A} \partial_\mu e^{\xi A} = \partial_\mu \xi' . A + \partial_\mu \eta' . V$$

$$\partial_\mu \psi' = \partial_\mu \psi + (\partial_\mu \eta' . T) \psi \tag{42}$$

On obtient pour les dérivées covariantes

$$\nabla_\mu \xi = \partial_\mu \xi'$$

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + (\partial_\mu \eta' . T) \psi \tag{43}$$

On peut vérifier explicitement que $\nabla_\mu \xi$ se transforme linéairement selon la représentation adjointe de H et $\nabla_\mu \psi$ selon D(h) par rapport ou groupe G, c'est à dire

$$(\nabla_\mu \xi)' = D^{adj} (e^{\eta' V}) (\nabla_\mu \xi)$$

$$(\nabla_\mu \psi)' = D (e^{\eta' V}) (\nabla_\mu \psi)$$

3) Application au cas SU(3) X SU(3)

H est le sous groupe diagonal SU(3) :

$$V_a = i(\lambda_a, \lambda_a)$$

$$A_a = i(\lambda_a, -\lambda_a)$$

Selon H, φ se transforme comme 8; Soit $\vec{\varphi} = \varphi^a \lambda_a$

Oublions les baryons qui n'interviennent pas dans ce travail.

$$e^{-\xi A} \partial_\mu e^{\xi A} = (e^{-i\vec{\xi}} \partial_\mu e^{i\vec{\xi}},\ e^{i\vec{\xi}} \partial_\mu e^{-i\vec{\xi}})$$

$$= i(\nabla_\mu \vec{\xi} + \partial_\mu \vec{\eta},\ -\nabla_\mu \vec{\xi} + \partial_\mu \vec{\eta})$$

$$\Rightarrow \nabla_\mu \vec{\xi} = \frac{1}{2i}(e^{-i\vec{\xi}} \partial_\mu e^{i\vec{\xi}} - e^{i\vec{\xi}} \partial_\mu e^{-i\vec{\xi}}) \qquad (44)$$

Construisons la partie de $\mathcal{L}$ invariante par rapport à G (terme cinétique)
Utilisons l'algorithme précédent : en fonction de $\partial_\mu \vec{\varphi}$ le seul terme invariant est

$$L_0 = T_2(\partial_\mu \vec{\varphi} + \partial^\mu \varphi)$$

D'où le lagrangien invariant selon G :

$$L_0 = T_2(\nabla_\mu \vec{\varphi} + \nabla^\mu \vec{\varphi})$$

Cependant la symétrie chirale G est brisée par des termes de masse. Imposons au lagrangien de se transformer selon une représentation D(g) de G.
Soit $\vec{X}(\varphi)$ un vecteur qui se représente selon D(g) :

$$\vec{X}(T_g \varphi) = D(g)\, \vec{X}(\varphi)$$

$$g = g_0 \quad \vec{X}(0) = D(e^{-\xi A})\, \vec{X}(\xi)$$

$$g = h \in H \text{ et si } \varphi = 0 \quad \vec{X}(T_h 0) = \vec{X}(0) = D(h)\, \vec{X}(0)$$

C'est à dire que la représentation D(g) contient un singlet de H. Par contre il est aisé d'obtenir un terme de ce type en fonction des $\nabla_\mu \varphi$ car elles se représentent linéairement.

On en déduit le théorème important : si un terme de couplage se représente selon une représentation de G, qui ne contient pas un singlet de H, le couplage est nécessairement dérivatif.

Construisons le terme de masse $\mathcal{L}_m$

Les termes de masse étant du type $(3,\bar{3})$ imposons à $\mathcal{L}_m$ de se représenter selon $(3,\bar{3}) + (\bar{3},3)$. Construisons un vecteur $M(\varphi)$ se représentant selon $(3,\bar{3})$

Si M est sous forme matricielle, dans une transformation $(U,V) \in G$

$$M \to M' = U M V^+$$

M(0) doit être invariant par rapport à $H \Rightarrow M(0) = I$.

On en déduit

$$M(\varphi) = D(e^{-i\vec{\varphi}\vec{\lambda}})\, M(0) = e^{i\vec{\varphi}}\, I\, e^{i\vec{\varphi}} = e^{2i\vec{\varphi}} \qquad (45)$$

Le terme de masse peut alors se mettre sous la forme :

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{8} m^2 \operatorname{Tr}\left(M^+(\varphi) + M(\varphi) \right)$$

dans le cas où on néglige la brisure de SU(3).

Le terme cinétique peut s'exprimer en fonction de M

$$\mathcal{L}_{cin} = \frac{1}{8} \operatorname{Tr}\left(\partial_\mu M^+ \partial^\mu M \right) \qquad (46)$$

(les facteurs 8 sont introduits pour retrouver les termes quadratiques habituels quand on développe M)

Il est possible d'obtenir les courants vectoriels et axiaux : Dans une transformation vectorielle $(1 + i\alpha_a \lambda^a, 1 + i\alpha_a \lambda^a)$, $M(\varphi)$ varie de $\delta_V M = i\vec{\alpha}[\vec{\lambda}, M]$ de même dans une tranformation axiale

$$\delta_A M = i\vec{\alpha}\{\vec{\lambda}, M\}$$

Les covariants s'obtiennent par le théorème de Noether :

$$\alpha_a J^a_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu M)} \delta M = \frac{1}{8} \operatorname{Tr}\left(\partial_\mu M^+ \delta M + \delta M^+ \partial_\mu M \right)$$

Soit $V_\mu = i/4 [M, \partial_\mu M^+]$ $\quad V_\mu = V_\mu^a \lambda^a$ (47)

$$A_\mu = i/4 \{M, \partial_\mu M^+\}_+$$

Quand on tient compte du terme de masse, A_μ n'est plus conservé et

$$\partial A_a = \frac{ib}{16} T_2 \left[\{(M-M^+), \lambda_a\}_+\right] \quad (48)$$

cette relation étant du type PCAC, au 2ème ordre

Il nous faut maintenant construire la partie d'interaction faible. A l'odre le plus bas on doit retrouver la forme $J_\mu J^\mu$ qui se représente par (1,8). Construisons un terme se représentant par (1,8). (1,8) ne contient pas de singlet de H, il faut donc le construire en fonction des dérivées $\partial_\mu M$ $\partial^\mu M^+ \partial_\mu M$ se transforme comme 8 par SU(3).

Ces interactions faibles conservant la charge, il faut extraire la composante sur λ_6 ou λ_7

Prenant la partie qui conserve CP, λ_6, on obtient :

$$\mathcal{L}_W = \frac{c G_F}{4\sqrt{2}} T_2 (\lambda_6 \partial_\mu M \partial^\mu M^+) \quad (49)$$

C est un coefficient phénomélogique.

Faisons la transformations $\mathcal{L}(\xi) \to \frac{1}{g^2} \mathcal{L}(g\varphi)$

$M(\xi)$ devient $M(\xi) = e^{2i g \varphi}$

$$A_\mu = i/4 \{\partial_\mu M^+, M\} = i g \partial_\mu \phi + \cdots$$

Donc $\langle 0 | A_\mu^3 | \pi \rangle = i g p_\mu e^{ipx} \Rightarrow g = g_\pi$

Le lagrangien ainsi construit permet de calculer une amplitude phénoménologique pour tout processus entre mesons, amplitude ayant les mêmes propriétés chirales que celles données par l'algèbre des courants.

IV. CALCUL DES AMPLITUDES ET DE $\varepsilon_{\omega/\varphi}$

Nous avons observé au chapitre précédent les Lagrangiens effectifs pour divers processus. Ces Lagrangiens s'expriment en termes d'opérateurs locaux à quatre quarks. Le problème est maintenant de calculer leurs éléments de matrice entre particules physiques.

Les particules physiques(ici mésons pseudoscalaires) sont constitués de quarks confinés c'est à dire qu'elles forment le spectre de la théorie (QCD) par le biais d'effets non perturbatifs; ces effets devront être pris en compte lors du calcul des éléments de matrice. Deux méthodes sont principalement utilisées : utiliser le modèle du sac, qui tient compte explicitement du confinement mais qui n'incorpore pas la symétrie chirale; une autre méthode populaire est l'insertion du vide que nous examinerons en détail.

A) Calcul des élements de matrice par l'insertion du vide :

1) Cas des quarks libres.

Prenons l'exemple de l'opérateur $\Delta S = 2 \quad CP = +1$

$$O_{JJ} = (\bar{s}_\alpha \gamma_\mu L d_\alpha)(\bar{s}_\beta \gamma_\mu L d_\beta) + h.c = J_\mu J^\mu + h.c \qquad (1)$$

insérons un ensemble complet d'état, écrivons :

$$\langle \bar{K}_0 | O_{JJ} | K_0 \rangle = \sum_n \langle \bar{K}_0 | J^\mu | n \rangle \langle n | J_\mu | K_0 \rangle \qquad (2)$$

Les états $|n\rangle$ doivent avoir les nombres quantiques du vide sauf la parité qui peut être $\pm$ 1. D'autre part $|n\rangle$ sont des états du spectre, soit par exemple, $|0\rangle$, $|\pi_0\rangle$, -- .

L'approximation du vide consiste à ne prendre que le vide dans les états intermédiaires. L'écriture (2) est en fait symbolique, il convient en effet d'insérer les états $|n\rangle$ de toutes les façons possibles ou ce qui revient au même, d'effectuer toutes les transformations de Fierz possibles.

L'approximation du vide (V.I) s'écrit alors :

$$\langle \bar{K}_0 | O_{VV} | K_0 \rangle = 2\left(\langle \bar{K}_0 | J_\mu^{\alpha\alpha} | 0 \rangle \langle 0 | J_\mu^{\beta\beta} | K_0 \rangle + \langle \bar{K}_0 | J_\mu^{\alpha\beta} | 0 \rangle \langle 0 | J_\mu^{\beta\alpha} | K_0 \rangle \right) \quad (3)$$

avec $J_\mu^{\alpha\beta} = \bar{s}_\alpha \gamma_\mu L d_\beta$

Le facteur 2 vient des permutations possibles de courants.

Les effets non perturbatifs sont pris en compte

$$\langle 0 | \bar{s}_\alpha \gamma_\mu \gamma_5 d_\beta | K_0 \rangle = i f_K p_\mu e^{-ipx}$$

Tenant compte des facteurs de couleurs (K_0 est singlet de couleur), on obtient

$$\langle \bar{K}_0 | O_{VV} | K_0 \rangle = 2 \times \frac{4}{3} f_K^2 m_K^2 \quad (4)$$

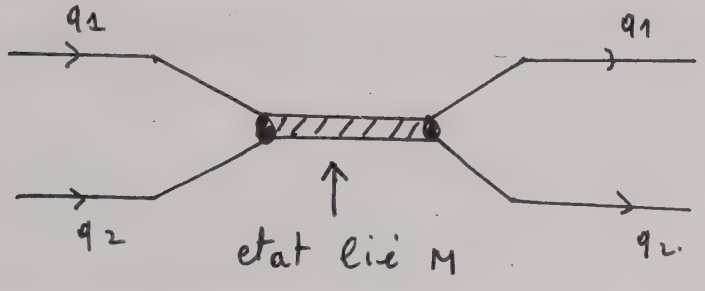
Quelle confiance pouvons-nous avoir en ce résultat? Il n'y a en effet aucun moyen de contrôler l'approximation ainsi faite. Schrock et Treiman[12] ont évalué la contribution de l'état $|\pi\rangle$ et ont trouvé $-\frac{1}{2}$ de (4).

Afin de mieux analyser la V.I, formulons le problème d'une façon très différente. La description relativiste d'un état lié n'est pas aussi simple que dans les cas classiques (Il n'y a pas d'équivalent de l'équation de Schrodinger).

Considérons un état lié de deux particules q_1 et q_2. Soit la fonction de Green

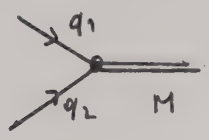
$$S^{(12)} = \langle 0 | T(\varphi^+_{q_2}(x_1) \varphi^+_{q_2}(y_1) \varphi_{q_1}(x_2) \varphi_{q_2}(y_2) | 0 \rangle$$

L'existence d'états liés se traduira par la présence de pôles dans $S^{(12)}$, ce que l'on peut traduire graphiquement par le diagramme :



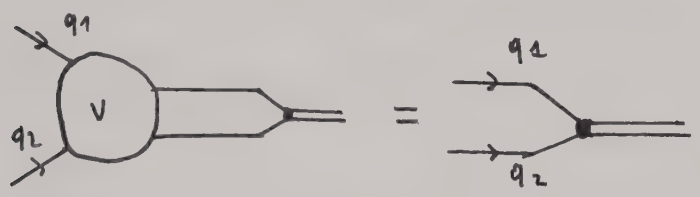
(5)

L'on peut définir un "vertex" entre états liés et particules constitutives q_1, q_2 par $\Gamma_M(q_1,q_2)$ associé au graphe



, soit $\Gamma_M = \langle 0 | T(\psi_1^+ \psi_2^+) | M \rangle$

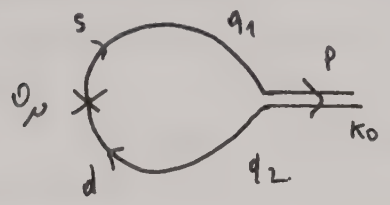
Γ_M prend en compte tous les effets de gluons ce qui peut se traduire par l'équation graphique :



(6)

On peut ainsi calculer des éléments de matrice, de la façon suivante :
Soit par exemple $\langle 0 | \bar{s} O_\mu d | K_0 \rangle$; O_μ représente un vertex

On peut écrire cet élément de matrice sous forme d'un diagramme :



(7)

Ce qui s'écrit $$-\int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \delta^4(q_1 - q_2 - p)\, T_2(O_\mu \tilde{\Gamma}_\mu(q_1,q_2)) \qquad (8)$$

(Le signe (—) provient de la "boucle" de fermions).
Evaluons l'intégrale :

$$0 = \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \delta^4(q_1 - q_2 - p)\, \Gamma_K(q_1,q_2) \qquad (9)$$

O est un opérateur de dirac, qui dépend de P et est de parité impaire.
Ecrivons

$$O = (a + b\,\not{p})\gamma_5 \qquad (10)$$

Pour déterminer b, calculons $\langle 0 | (\bar{s}\gamma_\mu\gamma_5 d) | K_0 \rangle = i f_K p_\mu$
compte tenu (8), et (10) on obtient

$$i g_K p_\nu = - T_2 \left[(a + b \not{p}) \gamma_5 \gamma_\nu \gamma_5 \right]$$

$$= 4 b p_\nu$$

D'où

$$b = i \frac{g_K p_\nu}{4} \qquad (11)$$

De même on obtient

$$a = \frac{1}{4} \langle 0 | \bar{s} \gamma_5 d | K^0 \rangle$$

Or la brisure de la symétrie chirale se traduit par :

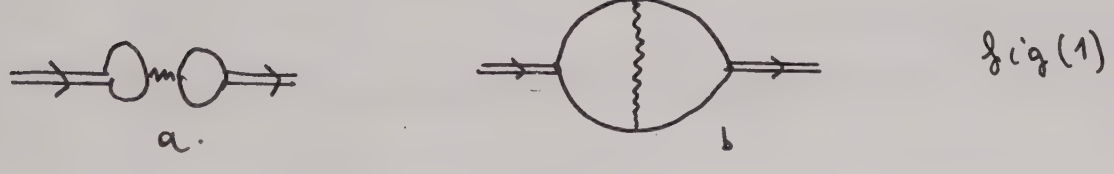
$$\partial^\nu (\bar{s} \gamma^\nu \gamma_5 d) = i (m_s + m_d) \bar{s} \gamma_5 d$$

d'où

$$a = \frac{i g_K m_K^2}{m_s + m_d} \qquad (12)$$

Remarquons que dans le cas où la symétrie chirale n'est pas brisée explicitement, ($m_s = m_d = 0$), les pseudo-scalaires sont des bosons de Goldstone ($m_K = 0$), mais $a \neq 0$. En effet on aura $a \propto \langle q \bar{q} \rangle$

Les diagrammes intervenant sont



a.

b

fig (1)

Le W est représenté pour différencier les deux diagrammes mais ne doit pas être pris en compte dans les calculs.

(a) se calcule aisément :

$$\langle \bar{K}^0 | O_{77} | K^0 \rangle_{(a)} = T_2 (\Gamma \gamma_\nu L) T_2 (\gamma_\nu L \Gamma) \qquad (13)$$

On retrouve alors

$$\langle K^0 | O_{77} | \bar{K}^0 \rangle_{(a)} = g_K^2 m_K^2$$

L'amplitude (6) se calcule de la même façon, les intégrations dans les intégrales du type (8) étant indépendantes, on obtient :

$$\langle K^0 | O_{77} | \bar{K}^0 \rangle_{(b)} = \frac{1}{3} g_K^2 m_K^2$$

compte tenu du fait que chaque diagramme apparaît deux fois, on trouve

$$\langle K^0 | O_{77} | \bar{K}^0 \rangle = \frac{8}{3} g_K^2 m_K^2$$ soit le résultat de la V.I.

Ce résultat est surprenant, car dans l'approximation où O_{77} est traité comme un opérateur libre, les diagrammes fig. 1 représentent toutes les contributions possibles. Autrement dit seul le vide contribue à la somme (2). Il faut en effet prendre des précautions avant d'écrire (2). O_{77} est un produit d'opérateurs au même point ce qui ne peut être défini que par :

$$O_{77} = :\bar{s}\gamma_\mu L d\ \bar{s}\gamma_\mu L d:$$

(14)

Sous cette forme l'insertion du type (2) n'a plus de sens. Par contre, le résultat obtenu est celui que l'on obtient par une généralisation du théorème de Wick :

$|K^0\rangle$ peut s'écrire sous la forme $|K^0\rangle = \int d\vec{k}\ b_s^+(k)\ d_{\bar{d}}^+(p-k)\ |0\rangle$

oubliant les intégrales, on a

$$\langle \bar{K}^0 | O_{77} | K^0 \rangle = \langle 0 | b_{\bar{s}}\ d_d :\bar{s}\gamma_\mu L d\ \bar{s}\gamma_\mu L d: b_s^+\ d_{\bar{d}}^+ | 0 \rangle$$

soit

$$\langle \bar{K}^0 | O_{77} | K^0 \rangle = 2\langle 0 | b_{\bar{s}}\ d_d :\bar{s}\gamma_\mu L d\ \bar{s}\gamma_\mu L d: b_s^+\ d_{\bar{d}}^+ | 0 \rangle$$

$$+ 2\langle 0 | b_{\bar{s}}\ d_d :\bar{s}\gamma_\mu L d\ \bar{s}\gamma_\mu L d: b_s^+\ d_{\bar{d}}^+ | 0 \rangle$$

(15)

où l'on reconnait dans (15) les deux diagrammes de la fig. 1. Ainsi dans le cas de champs libres, la (V.I) apparait comme un théorème de Wick, c'est à dire un résultat rigoureux.

Essayons de calculer $\langle O_{77} \rangle$ en utilisant un lagrangien phénoménogique. La transition Δ S=2 est un élément de la représentation 27 de SU(3).

$O_{77} = J_\mu J^\mu$ à la structure $(1,8) \times (1,8) = (1, 8 \times 8)$

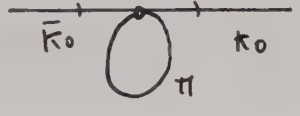
Dans le cas Δ S=2, O_{77} appartient à $(1,27)$.

(1,27) ne contient pas le singlet de SU(3), le couplage est donc dérivatif, soit :

$$: (\partial_\mu M)_{6-i7} (\partial_\mu M)_{6-i7} + h.c := O_{77} \qquad (16)$$

Les seules contributions viennent du terme $\partial_\mu \bar{K}_0 \partial_\mu K_0 g_K^2$ ce qui redonne la forme $f_K^2 m_K^2$.

Les ordres suivants n'existent pas à cause du produit normal; on obtiendrait sinon des Tadpoles du type



Ce cas particulier correspond au cas $|M\rangle = |\pi\rangle$ dans (2).

Ainsi le seul niveau en arbre contribue dans (16) ce qui est équivalent à la (V.I).

Toujours dans le même cadre calculons $\langle \bar{K}_0 | \mathcal{L}_-^{\Delta S=2} | K_0 \rangle$

Le problème est plus complexe, les couplages étant dérivatifs. Il nous faudra déterminer les termes du type $\langle 0 | \bar{s} \gamma_\mu L + d(p) | K_0 \rangle$

Il est tentant d'appliquer l'équation du mouvement et d'écrire

$$\langle 0 | \bar{s} \gamma_\mu L + d(p) | K_0 \rangle = m_d \langle 0 | \bar{s} \gamma_\mu L d | K_0 \rangle \qquad (17)$$

Il faut déterminer la nature de m_d . Pour Sanda, m_d est la masse constituante (M_d) c'est-à-dire la masse de courant renormalisée par les corrections radiatives à basse énergie, pour d'autres, md est la masse de courant.

La distinction est importante puisque $m_d \simeq 10$ MeV $M_d \simeq 330$ MeV

Or la condition de P.C.A.C $\partial A^a = m^2 g_\pi \phi^a = 2 m_q \bar{q} L \lambda^a q$

doit être respectée, c'est à dire

$$\partial^\mu \langle 0|\bar{s}\gamma_\mu L d|K^0\rangle = (m_s + m_d)\langle 0|\bar{s}Ld|K^0\rangle \qquad (18)$$

m_s et m_d étant les masses de courant. Or le premier membre de (18) fait intervenir des termes du type

$$\langle 0|\ \bar{s}(q)\not{q}Ld - \bar{s}(q)L\not{p}d(p)\ |K^0\rangle$$

Donc la masse m_d dans (17) est une masse de courant.
Le calcul de $\langle \bar{K}^0|\ \mathcal{H}^-_{\Delta S=2}\ |K^0\rangle$ fait intervenir des graphes du type de la figure (1).

Or

$$\mathcal{H}^-_{\Delta S=2} = \hat{g}\ \bar{d}_\alpha(p_2)\gamma_\mu\gamma_\nu R\, s_\alpha(p_1)\ \bar{d}_\beta(q_2)\gamma^\mu L\, s_\beta(q_1)\ (q_1-p_2)^\nu$$
$$= \hat{g}\ O_- \qquad (19)$$

$$\langle \bar{K}^0|O_-|K^0\rangle_a = \langle \bar{K}^0|\bar{d}(p_2)\gamma_\mu q_2 R\, s(p_1)\bar{d}\gamma^\mu L s|K^0\rangle$$
$$- m_s\langle \bar{K}^0|\bar{d}(p_2)\gamma_\mu L s(p_1)\bar{d}\gamma^\mu L s(q_1)|K^0\rangle$$

Les diagrammes d'annihilations (fig. 1 a) donnent pour le 1er terme :

$$2\int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4q_1}{(2\pi)^4}\, T_2\left(\bar{\Gamma}_{\bar{K}}\gamma_\mu q_2 R\right)T_2\left(\Gamma(q_1,q_2)\gamma_\mu L\right)$$

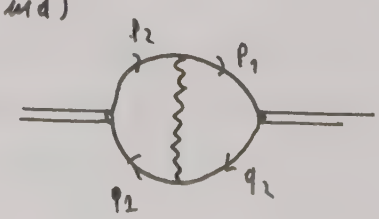
Soit en intégrant sur P 1 :

$$= \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4}\, T_2\left(\gamma_5(a+b\not{p})\gamma_\mu q_2 R\right)T_2\left(\Gamma(q_1,q_2)\gamma_\mu L\right)$$
$$= \frac{2m_d m_K^4 g_K^2}{(m_s+m_d)^2}$$

le deuxième terme de (20) est immédiat, d'où

$$\langle \bar{K}^0|O_-|K^0\rangle_a = \frac{2m_d m_K^4 g_K^2}{(m_s+m_d)^2} - 2m_s m_K^2 g_K^2 \qquad (21)$$

le terme d'échange (b) :



est

$$\frac{2}{3}\int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}\,\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\,T_2\left(\bar{\Gamma}(p_2,q_1)\gamma_\mu\gamma_\nu R\,\Gamma(p_1,q_2)\gamma_\mu L\right)(q_2-p_1)^\nu \qquad (22)$$

or $(q_2-p_1)^\nu = p_K^\nu$ l'intégration est alors immédiate :

$$\langle \bar{K}_0 | O_- | K_0\rangle_{(b)} = \frac{2}{3} T_2\left(\gamma_5(a+bf)\gamma_\mu\gamma_\nu R(a+bf)\gamma_5\gamma_\mu L\right)$$

Soit

$$\langle \bar{K}_0 | O_- | K_0\rangle_{(b)} = -\frac{2}{3}\,\frac{m_K^2 f_K^2}{(m_s+m_d)} \qquad (23)$$

Le calcul soigneux fait explicitement par la méthode de la V.I. (il fait prendre garde à la place des impulsions dans les éléments de matrices[9], ce qui est automatique avec notre méthode), donne le même résultat, soit

$$\langle \bar{K}_0 | O_- | K_0\rangle = \frac{2 m_d m_K^4 f_K^2}{(m_s+m_d)^2} - 2 m_s m_K^2 f_K^2 - \frac{2}{3}\,\frac{m_K^4 f_K^2}{(m_s+m_d)} \qquad (24)$$

O_- peut être décomposé en écrivant $\gamma_\mu\gamma_\delta = g_{\mu\nu} - i\sigma_{\mu\nu}$

Les termes $\sigma_{\mu\nu}$ n'intervenant pas, on peut écrire

$$O_- = \bar{d}_\alpha(p_2)\,R\,s_\alpha(p_1)\,\bar{d}_\beta(q_2)\gamma^\nu L\,s_\beta(q_1)\,(q_1-p_2)^\nu$$

ou encore faisons une transformation de Fierz :

$$O_- = \bar{d}_\alpha(p_2)\,R\,s_\beta(q_1)\,\bar{d}_\beta(q_2)\gamma^\nu L\,s_\alpha(p_1)\,(q_2-p_1)^\nu$$

et appliquons l'équation du mouvement

$$O_- = m_d\,\bar{d}_\alpha(p_2)\,R\,s_\beta(q_1)\,\bar{d}_\beta(q_2)\,L\,s_\alpha(p_1) - m_s\,\bar{d}_\alpha R s_\beta\,\bar{d}_\beta R s_\alpha \qquad (25)$$

il est facile de s'assurer que l'élément de matrice de (25) donne bien (24)

2) Nous avons vu que l'approximation du vide est en fait rigoureuse dans le cas où O_- est libre.

Quelles sont les modifications à apporter si l'on tient compte que les champs dans O_- sont en interaction?

Dans ce cas nous avons dérivé au chapitre précédent une théorie effective à 3 quarks dans laquelle le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = \sum_i C_i O_i$$

O_i sont des opérateurs locaux sous forme normale , par exemple

$$: \bar{s} \gamma_\mu L d \; \bar{s} \gamma^\mu L d :$$

les C_i dépendent de M_W, (M_H), m_t, m_b, m_c, ν ;
les éléments de matrice $\langle O_i \rangle$ doivent donc être évalués à tous les ordres en interactions fortes dans une théorie effective à 3 quarks. $\langle \mathcal{L} \rangle$ est indépendant de ν donc $\langle O_i \rangle$ est fonction de ν . D'autre part, les champs lourds ayant été découplés, il ne reste qu'une échelle de masse légère ($\sim M_W$), c'est à dire que nous ne sommes pas dans le régime perturbatif. Cependant, par exemple, dans le cas (K.M.), $\Delta S=2$ les opérateurs

$$O_{11}^{\pm} = (\bar{s}_\alpha \gamma_\mu L d_\alpha)(\bar{s}_\beta \gamma_\mu L d_\beta) \pm (\bar{s}_\alpha \gamma_\mu L d_\beta)(\bar{s}_\beta \gamma_\mu L d_\alpha)$$

forment un ensemble fermé par renormalisation à un nombre quelconque de boucles, si l'on néglige les masses m_s et m_d.

On peut donc écrire à tous les ordres :

$$\langle O_{JJ}^{\pm} \rangle = C(\nu^2) \langle O_{11} \rangle_{libre}$$

où le coefficient $C(\nu^2)$ ne peut être déterminé théoriquement et prend en compte tous les effets d'ordre supérieur.

Remarquons que dans le modèle de sac, on trouve

$$\langle O_{JJ} \rangle = \frac{1}{2} \langle O_{11} \rangle_{VI}$$

Or pour la transition K_o-$\bar{K}_o$, le modèle de sac, semble bien adapté : K_o et $\bar{K}_o$ sont identiques pour l'interaction forte, le calcul ressemble donc a un calcul de spectre, qui est un succés du modèle de sac. D'autre part, dans ce modèle les effets de gluons sont dans une certaine mesure,-

introduits, on peut donc identifier $1/2\ \bar{a}\ C\ (\nu^2)$

Dans le cas $\Delta S=1$, il est intéressant de calculer l'élément de matrice du PG par la même méthode. Une fois les champs lourds découplés, on obtient un opérateur local :

$$:\bar{s}\gamma_\mu\lambda^a L\, d \sum_{q=u,d,s} \bar{q}\gamma_\mu\lambda^a q:$$

or Schifman, Vainshtein et Zakharov [13] (SVZ) on calcule son élément de matrice par la méthode de la V.I et trouvé :

$$\langle K^0|(\bar{s}\gamma_\mu L d)(\sum \bar{q}\gamma_\mu Q)|\pi\rangle \propto \frac{1}{2m_U} \times \frac{1}{m_s+m_U} (g_\pi m_\pi^2)(g_K m_K^2) \qquad (26)$$

Dans la limite chirale $m_q \to 0$ (26) est finie et non nulle car

$\frac{m_\pi^2}{2m_U} \propto \langle 0|q\bar{q}|0\rangle = \nabla$ ∇ étant le paramètre du à la brisure spontanée de la symétrie chirale.

Or l'opérateur $(\bar{s}\gamma_\mu L d)(\sum \bar{q}\gamma_\mu Q)$ à la structure chirale :

$(1,8)\times(1,1) = (1,8)$ soit $\underline{8}$ par rapport à SU(3). Compte tenu du théorème de Coleman (ch. III, B) le lagrangien phénoménologique est dérivatif soit de la forme $\partial_\mu K \partial^\mu \Pi$ qui donnne un élément de matrice nul dans la limite $m_K^2 = m_\pi^2 \to 0$

(26) est donc en contradiction avec l'algèbre des courants, l'approximation des quarks de valence fait donc défaut ici.

En effet pour calculer (26) seul le terme $\bar{d}\gamma_\mu d$ a été retenu dans $\sum \bar{q}\gamma_\mu q$ brisant en cela la structure chirale. Le calcul de cet élément de matrice doit donc faire intervenir des ordres supérieurs et aussi se limiter aux quarks de valence. Ne sachant pas faire un tel calcul le traiterons phénoménologiquement (Voir chap. suivant).

B) Calcul de $\frac{\varepsilon_m}{\xi}$ (ou ε'/ε)

$$\varepsilon_m = \frac{\mathrm{Im}\, M_{12}}{\mathrm{Re}\, M_{12}}$$

calculons

$$\langle K_0 | \mathcal{H}^{\Delta S=2} | \bar{K}_0 \rangle$$

Le calcul a été effectué en ignorant les effets de QCD par Gaillard et al[14] qui ont trouvé que le modèle de KM se comportait comme une théorie super-faible. Cependant nous avons vu que les corrections de QCD génèrent des opérateurs $\Delta S = 1$ de type nouveau (Pingouin). L'analyse phénoménologique de la règle $\Delta I = 1/2$ indique que les Pingouins contribue par une large part à l'amplitude totale. Il est donc impératif de tenir compte des corrections QCD, c'est ce qu'on fait Gilman et Wise[15].

Pour $\Delta S=2$, les corrections QCD, après réduction des champs W,t,b,c donne

$$H^{\Delta S=2} = \left(\lambda_c^2 m_c^2 \eta_1 + \lambda_t^2 m_t^2 \eta_2 + 2 \lambda_c \lambda_t m_c^2 \log \frac{m_t^2}{m_c^2} \eta_3 \right) \frac{G_F^2}{16\pi^2} O_{VV} \qquad (27)$$

La méthode de calcul des sera donnée dans le cadre du modèle de Weinberg Négligeant s_1 et s_3 qui sont faibles, on obtient :

$$\varepsilon_m = 2 s_2 c_2 s_3 \sin\delta \left\{ \frac{-c_2^2 m_c^2 \eta_1 + s_2^2 m_t^2 \eta_2 + (c_2^2 - s_2^2) \eta_3 m_c^2 \log \frac{m_t^2}{m_c^2}}{c_2^4 m_c^2 \eta_1 + s_2^4 m_t^2 \eta_2 + 2 s_2^2 c_2^2 \eta_3 m_c^2 \log \frac{m_t^2}{m_c^2}} \right\} \qquad (28)$$

Nous voyons sur (27) que δ n'étant pas déterminé ni m_t et θ_2 pourra toujours être ajusté sur la valeur expérimentale. Il est beaucoup plus intéressant de calculer ε'/ε, ou $\frac{\varepsilon_m}{\xi}$ d'où certains facteurs (dont δ) disparaitront.

Evaluons $\langle K | \mathcal{H}^{\Delta S=1} | \pi \rangle$

$$\xi = \frac{\mathrm{Im} \langle K | \mathcal{H} | (\pi\pi)_0 \rangle}{\mathrm{Re} \langle K | \mathcal{H} | (\pi\pi)_0 \rangle}$$

Or l'expression de $\mathcal{H}^{\Delta S=1}$ (ch. III (29)) montre que pour les termes "normaux" O_1 et O_2, , $\xi \sim 10^{-1} \sin\delta$ alors que pour les autres $\xi \sim \sin\delta$

Compte tenu du fait que O_6 a les coefficients les plus élevés et que $\langle K | O_6 | \pi \rangle$

domine (dans la V.I)! seule sa contribution est retenue.
Soit f la fraction de pingouin i.e.

$$f = \frac{\langle \pi | \mathcal{Y}_+ | \pi \rangle_{\text{pingouin}}}{\langle \pi | \mathcal{Y}_+ | \pi \rangle}$$

Avec ces hypothèses, $\varphi = f \, \mathrm{Im} C_6 / \mathrm{Re} C_6 \, C_6$ étant le coefficient de Wilson de O_6 dans $\mathcal{Y}$. Utilisant f = 0,75 $\theta_2 = 15^\circ$ et différentes valeurs de μ^2 et m_t^2 Gilman et Wise ont obtenu les résultats présenté table 1.
Les résultats sont compatibles avec l'expérience, mais le modèle KM peut être distingable du modèle superfaible si l'on tient compte du Pingouin; il faut pour cela attendre une meilleure précision expérimentable sur ε'/ε

2) Dans le modèle de Weinberg

Comme nous l'avons vu au chapitre rpécédent, seul le terme de type Pingouin contribue à $\mathcal{Y}_-^{\Delta S = 1}$
Il faut donc évaluer

$$\langle K_0 | \bar{s} \sigma_{\mu\nu} R \lambda^a d \, F^{\mu\nu} | \pi \rangle = a^-_{K\pi} \qquad (29)$$

Nous n'avons aucun moyen de calculer correctement un tel terme.
Faison tout d'abord une remarque préliminaire :

$$\varphi = \frac{\langle K_0 | \mathcal{Y}_- | (\pi\pi)_0 \rangle}{\langle K_0 | \mathcal{Y}_+ | (\pi\pi)_0 \rangle}$$

$\mathcal{Y}_+$ est dominé par le terme de pingouin normal $(\bar{s} \gamma_\mu L d)(\Sigma \bar{q} \gamma^\mu q)$ tandis que $\mathcal{Y}_-$ est donné par $(\bar{s} \sigma_{\mu\nu} R d) F^{\mu\nu}$
Pour calculer φ il est utile de réduire un pion par PCAC obtenant

$$\varphi = \frac{\langle K_0 | \mathcal{Y}_- | \pi_0 \rangle}{\langle K_0 | \mathcal{Y}_+ | \pi_0 \rangle} \qquad (30)$$

Le φ ainsi calculé est celui qui est défini quand l'un des π est mou. Pour obtenir φ il faut ensuite extrapoler à la région physique (Particules sur leur couche de masse).

Si $a^{\pm}_{K\pi\pi} = \langle K_0 | \mathcal{L}_{\pm} | (\pi\pi)_0 \rangle$ ont la même dépendance dans les impulsions la formule (30) sera exacte.

Or la dépendance dans les impulsions externes est donnée par le lagrangien phénoménologique ou la structure chirale.

Or pour $\mathcal{L}_+$ $\sum \bar{q}\gamma^\mu Q \sim (1,1)$ $\bar{s}\gamma_\mu L d \sim (1,8)$

Donc $\mathcal{L}_+ \sim (1,8)$

$\mathcal{L}_-$ est plus complexe : $\bar{s}\sigma R d \sim (\bar{3},3)$

$F^{\mu\nu}$ contient des termes $\partial^\mu A^\nu$ si $A^\nu \sim (1,1)$ $\partial^i \sim (1,1)$

∂^0 modifie la structure chirale par le fait de la brisure de symétrie du terme de masse :

$$\partial^0 O = [H, O] \quad \text{et} \quad H \sim (3,\bar{3}) + (\bar{3},3)$$

Ler termes $A_\mu A_\nu$ de $F_{\mu\nu}$ sont (1,1) et leur contribution à $\mathcal{L}_-$ donne donc un terme $(\bar{3},3)$.

Intéressons nous à $\bar{s}\,\nabla_{\mu\nu} R d\, \partial^\mu A^\nu = \partial^\mu (\bar{s}\,\nabla_{\mu\nu} R d)\, A^\nu$

Soit encore

$$\partial^0 (\bar{s}\,\nabla_{\mu 0} R d) A^\mu + \partial^i (\bar{s}\,\nabla_{i\nu} R d) A^i \qquad (31)$$

Dans (31) le deuxième terme appartient à $(\bar{3},3)$. Le premier, tenant compte de $\nabla_{\mu 0} = \nabla_{i0} = \gamma_i\gamma_0$ donne :

$$(\bar{d}_R \gamma_i \gamma_0 \overleftrightarrow{\partial_0} s)\, A^i = m_s\, \bar{d}_R \gamma_i s_R - \bar{d}_R \gamma_i \gamma^i \overleftrightarrow{\partial_i} s_R$$

en utilisant l'équation du mouvement.

La présence de ∂_i ne change pas les propriétés chirales et $\bar{d}_R \gamma_i s_R \sim (8,1)$

Donc

$$\mathcal{L}_- = (\bar{3},3) + (8,1) \qquad (32)$$

Or les termes $(3,\bar{3})$ et $(\bar{3},3)$ se transforment comme des termes de masse. Une redéfinition des champs permet de les éliminer. Une telle redéfinition modifie en pricipe l'angle de Cabibbo mais dans un rapport de l'ordre de

$\frac{H_W}{M_s}$ (par un terme de l'ordre de l'interaction faible donc complètement négligeable). Ainsi $\mathcal{L}_{-2}$ (8,1)+(1,8) soit comme $\mathcal{L}_+$
Nous pouvons donc utiliser (30).
Calculons $a_{K\bar{\pi}}$. A l'ordre le plus bas $a_{K\bar{\pi}}$ est donné par le diagramme

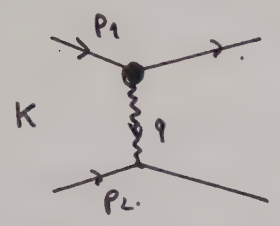


fig 7

Un tel diagramme donne un terme

$$g_8 \frac{g^2}{q^2} (\bar{s} \sigma^{\mu\nu} R \lambda^a d) \frac{q^\nu}{q^2} \sum_q \bar{q} \gamma_\mu \lambda^a q \qquad (33)$$

un tel terme ne donne pas de contribution locale. Approximons $\frac{1}{q^2}$ par la valeur moyenne $\frac{1}{\langle q^2 \rangle}$, $\langle q^2 \rangle$ représentant l'impulsion transverse moyenne des quarks dans les mésons. Avec cette approximation (33) devient local :

$$g_8 \frac{g^2}{\langle q^2 \rangle} \partial^\nu (\bar{s} \sigma_{\mu\nu} R \lambda^a d) \sum \bar{q} \gamma_\mu \lambda^a q \qquad (34)$$

D'autre part, pour calculer (34) les mêmes problèmes que pour le pingouin ressurgissent : le calcul par la V.I. introduit des termes incompatibles avec la structure chirale.
Utilisant l'équation du mouvement, on obtient :

$$i \bar{d}(p_2) \sigma^{\mu\nu} R s(p_1) (p_1 - p_2)_\nu = -(m_s \bar{d}(p_2) \gamma^\mu R s(p_1) + m_d \bar{d}(p_2) \gamma^\mu R s(p_1) - (p_1 + p_2)_\mu \bar{d}(p_2) R s(p_1))$$

or $P_1 + P_2 = 2P_K + q_1 + q_2$.

D'où

$$(p_1 + p_2)_\mu \bar{d}(p_2) R s(p_1) \sum \bar{q} \gamma_\mu q = 2 P_{K\mu} \bar{d}(p_2) R s(p_1) \bar{q}(q_1) \gamma^\mu q(q_2) + 2 m_q \bar{d}(p_2) R s(p_1) \bar{q}(q_1) q(q_2) \qquad (35)$$

Dans le cas d'une symétrie SU(3) le 1er terme de (35) est nul. Pour évaluer (34) retenons le terme en m_s, obtenant

$$\bar{a}_{K\pi} \simeq \frac{\bar{g}_3(\mu^2)\tilde{g}}{\langle q^2 \rangle} m_s \langle K_0 | \bar{d}(p_2)\gamma^\nu R \lambda^a s \sum \bar{q}\gamma^\nu q | \pi \rangle \qquad (36)$$

or (36) est analogue à la contribution du pingouin.

$$\tilde{g}\, a^+_{K\pi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \lambda_{tu} \cos\theta_c \langle K_0 | (\bar{d}(p_2)\gamma^\nu R \lambda^a s)(\sum \bar{q}\gamma^\nu q | | \pi \rangle C_6$$

$$\tilde{g}^2 = \frac{G_F 2^{3/2}}{8} \frac{m_s m_c^2}{M_H^2} \lambda_{tu} \cos\theta_c C_7 \, \mathrm{Im}\, \gamma_c^* \qquad (37)$$

D'autre part, il nous faut connaître $a^+_{K\pi}$ qui peut être déduit par l'algèbre des courants de $a(K_s \to (2\pi))$. Une autre solution est d'utiliser le Lagrangien effectif, normalisé par $a(K_s \to 2\pi)$. Soit

$$A(K_s \to \pi_0\pi_0) = -\frac{iC G_F}{2}(2k^2 - p^2 - q^2)\tilde{g}_\pi \qquad C = 1,1$$
$$k \quad p \quad q \qquad\qquad \tilde{g}_\pi = m_\pi$$

C étant ajusté pour obtenir la valeur expérimentale.

$$\Rightarrow \quad a^+_{K_0\pi_0} = \frac{C G_F}{\sqrt{2}} \frac{m_K^2 \tilde{g}_\pi^2}{\sqrt{2}} \qquad (38)$$

Utilisant $\langle K_0 | \mathcal{H}_{-1} | \bar{K}_0 \rangle$, (24), la valeur expérimentale de Δm on obtient

$$\frac{\tilde{g}}{\varepsilon_m} \simeq 4,9\, g \qquad (g \sim 0,75) \qquad (39)$$

Utilisant des méthodes semblables, mais sans tenir compte des effets de correction QCD aux pingouins, Sanda [16] obtient :

$$\frac{\tilde{g}}{\varepsilon_m} \gtrsim 15$$

Utilisant le modèle de Sac, pour calculer les éléments de matrice, Donoghue et al.[10], obtiennent : $5 < \tilde{g}/\varepsilon_m < 30$

Ainsi le modèle de Weinberg semble être incompatible avec l'expérience la transition $\Delta S = 1$ étant beaucoup trop importante par rapport à la transition $\Delta S = 2$.
Deux questions peuvent alors être posée :

- Quel est l'effet de la 3ème génération (b, t)?
- Quels sont les effets des corrections de QCD sur l'opérateur $\Delta S = 2$?

La 1ère question a déjà été analysée[10], mais une réponse quantitative précise ne peut être donnée étant donné le nombre de paramètres inconnus. D'autre part, plusieurs cas peuvent être envisagés : $m_c \ll m_t \ll M_{H_1} \ll M_{H_2}$ ou $m_c \ll m_t \sim M_{H_1} \ll M_{H_2}$

Etant donné les compensations qui peuvent avoir lieu entre c et t dans les termes $\mathcal{L}_{H,W}$ il est nécessaire de tenir compte de $\mathcal{L}_{HH}$ (10, Chap. III). D'autre part, il existe une contrainte expérimentale sur λ_t, donnée par la désintégration $K_L \to \mu^+\mu^-$: $\lambda_t < 0{,}19 \sin\theta_c \left(\frac{100}{m_t}\right)^2$ GeV
De ce fait l'effet du "t" sera toujours limité. Dans tous les cas étudiés, g/ε_m reste toujours supérieur à l'unité.

La deuxième question mérite d'être étudiée : les corrections QCD peuvent peut-être générer des opérateurs à faible coefficient mais ayant des éléments de matrice importants (comme c'est le cas pour le pingouin).

3) Corrections QCD à l'opérateur $\Delta S = 2$

Nous donnons ici le principe de la méthode qui a été appliquée au cas standard $\mathcal{L}_t^{\Delta S=2}$ par Gilman et Wise. Le lagrangien libre a déjà été obtenu à partir des diagrammes en boîte qui donne en fait un T produit de 4 courants. La première étape consiste à considérer H et W comme lourd par rapport aux autres échelles de masse. Les opérateurs qui peuvent être générés sont alors :

$$H_t^i = \int d^4x \; T(O_{cc}^{\pm} O_{cc}^i) - T(O_{uc}^{\pm} O_{uc}^i) \qquad (40)$$

$i = 1,2,3,4,5.$

avec $O^{\pm}_{qq'}$, se rapportant aux opérateurs V-A

$$O^{\pm}_{q,q'} = (\bar{s}_i \gamma_\mu L q_i)(\bar{q}'_j \gamma^\mu L d_j) \pm (\bar{s}_i \gamma_\mu L q_j)(\bar{q}'_j \gamma^\mu L d_i)$$

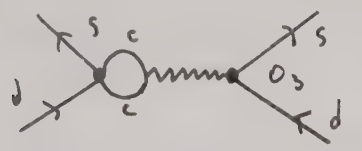
et O^i_{uc} sont les opérateurs déjà introduits dans le cas CP = -1, $\Delta S = 1$. (Chap. III). Le lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L}_{\Delta S=2} = \sum_{\pm,i} L^{\pm}_i(M_H, M_W, g)\, H^i_{\pm} \qquad (41)$$

$L^{\pm}_i$ vérifient des équations du groupe de renormalisation standard :

$$\left(\mu \frac{D}{D_\mu} - \gamma^T_{ij}\right) L^{\pm}_j = 0 \qquad (42)$$

une fois de plus nous pouvons faire quelques approximations supplémentaires
Examinons $H^i_{\pm}$ pour i = 2,3,4,5.
Quand on intégre sur la boucle de quarks interne, les opérateurs effectivement générés sont du type $(\bar{s}\,\sigma_{\mu\nu} R d)(\bar{s}\,\gamma_\mu L d)\, q_\nu$
ou $(\bar{s}\,\sigma_{\mu\nu} R d)(\bar{s}\,\sigma_{\mu\nu} R d)$
Soit des opérateurs du même type que ceux qui apparaissent en théorie libre, mais qui auront des coefficients faibles étant donné qu'ils ne peuvent être généré que par un mélange. Notons que l'opérateur $\int T(O^{\pm}_{cc} O^{1}_{cc})$ correspondant au "double pingouin" :



donnera lui aussi un opérateur du type (43).
Ainsi nous ne conservons que O_1 et O_2, les fonctions étant alors du type :

$$L^{\pm}_i = \left(\frac{\alpha(M_W^2)}{\alpha(\mu^2)}\right)^{a_+} \left(\frac{\alpha(M_H^2)}{\alpha(\mu^2)}\right)^{a_i} 1/2 \qquad (43)$$

L'étape suivante consiste à éliminer C de la théorie , ce qui génère l'opérateur de la théorie libre et son transformé de Fierz.

Dans le cas de 3 générations il faut sommer les termes dominants successivement en W, H, t, b, c . Les calculs sont alors très complexes et ne peuvent être faits analytiquement qu'au prix de nombreuses approximations.

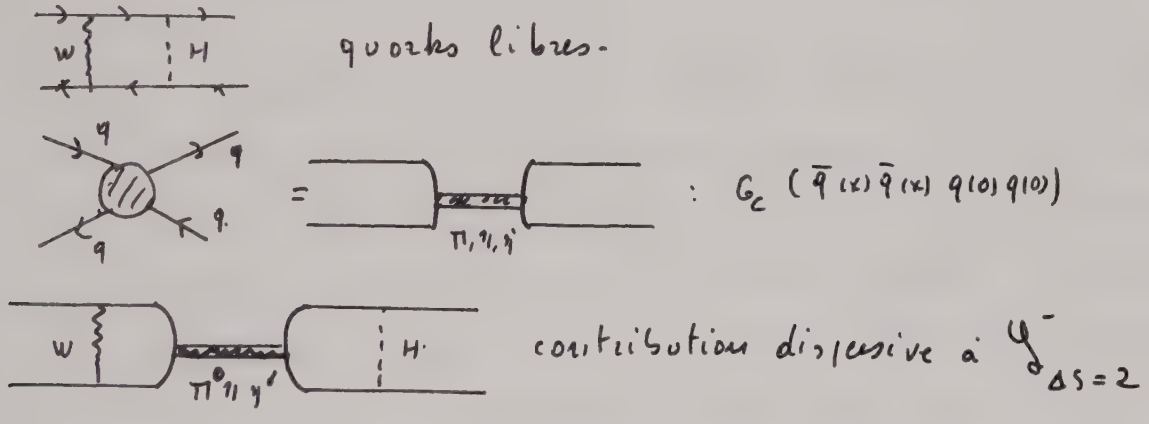
Que ce soit dans le cas standard ou dans le modèle de Weinberg, les corrections QCD sont relativement faibles et de toute façon ne peuvent pas modifier profondément le résultat précédent.
Les résultats sont donnés dans l'article du chapitre III.

Parameters	$\xi/fs_2c_2s_3\sin\delta$	$\varepsilon_m/s_2c_2s_3\sin\delta$	ε'/ε
$\alpha(\mu^2) = 0.75$, $m_t = 15$ GeV	$-\left(0.42 + s_2^2\right)^{-1}$	7.2	1/27
$\alpha(\mu^2) = 1.00$, $m_t = 15$ GeV	$-\left(0.65 + s_2^2\right)^{-1}$	7.2	1/49
$\alpha(\mu^2) = 1.25$, $m_t = 15$ GeV	$-\left(0.81 + s_2^2\right)^{-1}$	7.2	1/64
$\alpha(\mu^2) = 0.75$, $m_t = 30$ GeV	$-\left(0.33 + s_2^2\right)^{-1}$	16	1/65
$\alpha(\mu^2) = 1.00$, $m_t = 30$ GeV	$-\left(0.51 + s_2^2\right)^{-1}$	16	1/103
$\alpha(\mu^2) = 1.25$, $m_t = 30$ GeV	$-\left(0.62 + s_2^2\right)^{-1}$	16	1/127

Table 1

V. CONTRIBUTIONS DISPERSIVES AUX TRANSITIONS $\Delta S = 2$

Dans le chapitre précédent, nous avons calculé les effets de courte distance sur les transitions $\Delta S = 1$ et $\Delta S = 2$. Cependant, il existe d'autres effets, dits de longue distance ou dispersifs. Ces effets peuvent être envisagés d'une manière purement phénoménologique, mais aussi peuvent être relié au schéma théorique général. Le diagramme en boîte peut être modifié de la façon suivante : les propagateurs de quarks libres correspondent à la partie discorrectée de $T(\bar{q}(x)\,\bar{q}(x)\,q(0)\,q(0))$ introduisant les interactions fortes dans cette fonction de Green, on définit une amplitude de diffusion $qq \to qq$. Cette amplitude a des pôles qui correspondent aux mésons pseudoscalaires qq. Introduisant cette fonction de Green dans le diagramme en boîte, on obtient les contributions dispersives (fig. 1).



Les détails de calcul sont donnés dans l'article suivant. On trouve que $\left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon}\right)_{disp} = 17,3 \times \delta$ où δ est la fraction de Pingouin dans l'amplitude totale $a_{K\pi}$. Soit encore $\left(\varepsilon'/\varepsilon\right)_{disp} = -0,007 \quad (\delta = 0,75)$

Dans le modèle de Weinberg, les diagrammes en boîte donnent $\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon} \ll 1$ ce qui est négligeable devant la contribution dispersive. Si l'on exclut des

compensations accidentelles avec d'autres contributions dispersives, le modèle n'est pas en conflit avec l'expérience, et reste une alternative possible à celui de K M. Il faudra donc trouver d'autres phénomènes comme le mixing $B_o - \overline{B}_o$ (voir chap. VII) pour distinguer les modèles.
Dans le modèle de KM la contribution dispersive est du même ordre que la partie courte distance, ces deux contributions additives donnent un $\varepsilon'/\varepsilon \simeq -0{,}005$ rendant le modèle encore distingable d'une théorie super-faible. Notons que de très faibles valeurs de ε'/ε pourront être détectée dans des expériences de grande précision à Fermilab.

DISPERSIVE CONTRIBUTION TO $K^o - \overline{K}^o$ TRANSITION AND HIGGS-BOSON EXCHANGE MODEL OF CP VIOLATION

Y. DUPONT

T.N. PHAM

Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau - 91128 Palaiseau - Cedex - France

"Groupe de Recherche du C.N.R.S. n^o 48"

ABSTRACT

Dispersive π^o, η, η' - pole contributions to CP violating $K^o - \overline{K}^o$ transition is analysed for the Higgs-boson exchange model of CP violation and is found to produce ε_m/ξ much larger than the box diagram contributions independent of CP violating $\Delta S = 1$ matrix elements. Penguin type CP Violating $\Delta S = 2$ transition due to one gluon exchange not analysed previously is found to be negligible. This indicates that barring accidental cancellation of the low energy and high energy dispersive contributions, Higgs-boson exchange model of CP violation can still be acceptable with present data on ε'/ε.

A498.0482

Avril 1982
(Revised version)

Within the gauge theory of weak interactions, the six-quark model with complex coupling constants of gauge bosons with quarks given by the Kobayashi-Maskawa matrix (KM model) seems to be the most economical model for CP violations.[1] This model predicts a vanishingly small value for ε'/ε and is therefore experimentally indistinguishable from the superweak theory at present.[2] However in general if there exists more than two Higgs doublets then CP violations can also arise from the complex Yukawa coupling constants of the Higgs-bosons to quarks. This is the spontaneous CP violation model[3,4] of Lee and Weinberg. This model gives a large neutron electric dipole moment[3,4] of the order 10^{-24} cm $\sim 10^{-25}$ cm which is on the edge of experimental limits and is about 5 order of magnitude larger than that given by the KM model.[5] Until a much more improved experimental upper limit for the neutron electric dipole moment, there seems to be no clear-cut evidence in favor of either of these two models and their variations.

Recently Deshpande and Sanda (D & S) have independently carried out an analysis of CP violation effects in the $K^o\bar{K}^o$ system in the Higgs boson exchange model.[6,7] Assuming the existence of charged Higgs-bosons which couple to quarks with complex Yukawa coupling constants similar to the complex KM matrix, they obtain a quite large value for ξ/ε_m in conflict with experiments. This result is confirmed by Donoghue et al. in a subsequent analysis.[8] Using the MIT bag model to calculate the CP violating matrix elements $\langle \bar{K}^o | \mathcal{L}_w(\Delta S = 2) | K^o \rangle$ and $\langle \pi^o\pi^o | \mathcal{L}_w(\Delta S = 1) | K^o \rangle$ they found that ξ/ε_m is indeed larger than experiment by a factor of more than 20. This large discrepancy between theory and experiment is then used to rule out the Higgs boson-exchange model of CP violation. The large value for ξ/ε_m in this model is due

mainly to the fact that the coefficient of the $\Delta S = 1$ operator is large than that of the $\Delta S = 2$ operator of the box diagrams by a factor $\ell n \frac{m_H^2}{m_c^2}$ with $m_H^2 >> m_c^2$ and the conclusion reached by these authors is based on the estimate for $\langle \bar{K}^o | \mathcal{L}_w (\Delta S = 2) | K^o \rangle$ from the box diagrams alone. However in this model, because of the suppression of the box diagram contribution to $\langle \bar{K}^o | \mathcal{L}_w (\Delta S = 2) | K^o \rangle$ relative to $\langle \pi^o | \mathcal{L}_w (\Delta S = 1) | K^o \rangle$, other contributions to $\langle \bar{K}^o | \mathcal{L}_w (\Delta S = 2) | K^o \rangle$ must be included. One such contribution is given by the dispersive part[9] of $\int d^4x \langle \bar{K}^o | T \{ \mathcal{L}_w(x) \mathcal{L}_w(0) \} | K^o \rangle$ which is dominated by the low-lying intermediate states (the so-called large distance contribution) and can be estimated more or less in a model independent way. The importance of the Dispersive Contribution to ε_m in the Higgs-boson exchange model of CP violation has also been discussed by Chang who pointed out[10] that a large dispersive part can save the model. In this paper we present an estimate of this contribution and show that under reasonable assumptions, the π^o, η, η' intermediate states (pole dominance approximation) alone gives ε_m / ξ much larger than the box diagram contribution. This indicates that the $\Delta S = 2$ $K^o - \bar{K}^o$ transition induced by the mixing of K^o, $\bar{K}^o$ with π^o, η, η' are large and can produce ε'/ε compatible with experiment. Barring accidental cancellation between the low energy (π^o, η, η' pole) and the high energy (believed to be small) dispersive contributions, it appears that hte Higg-boson exchange model of CP violation cannot be ruled out at the moment as claimed by Despande and Sanda and by Donoghue et al..

In the following, for convenience we assume standard K^o-$\bar{K}^o$ phenomenology and use the usual notations of Gilman and Wise and others.[11] The usual parameters characterising CP violation in $K \to 2\pi$ decays are defined as follows :

$$\eta_{+-} = \frac{\langle \pi^+\pi^- | \mathcal{L}_w | K_L \rangle}{\langle \pi^+\pi^- | \mathcal{L}_w | K_S \rangle} = \varepsilon + \varepsilon'$$

$$\eta_{oo} = \frac{\langle \pi^o\pi^o | \mathcal{L}_w | K_L \rangle}{\langle \pi^o\pi^o | \mathcal{L}_w | K_S \rangle} = \varepsilon - 2\varepsilon' \qquad (1)$$

In model with CP violation arising solely from the K_S^o - K_L^o transition, for example in the superweak theory[12] of Wolfenstein, $\varepsilon' = 0$ and $\eta_{+-} = \eta_{oo}$. In general $\varepsilon' \neq 0$ for theories with $\Delta S = 1$ interactions responsible for a direct CP-violating $K_L^o \to 2\pi$ decay in addition to the $\Delta S = 2$ interactions induced by the transition mass matrix. In particular if the direct CP-violating interactions is purely $\Delta I = \frac{1}{2}$ (e.g. Penguin type diagrams), following Gilman and Wise, we have

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = -\left(\frac{1}{20}\right) \frac{2\xi}{\varepsilon_m + 2\xi} \qquad (2)$$

where

$$\varepsilon_m = \frac{\mathrm{Im}\ M_{12}}{\mathrm{Re}\ M_{12}} \qquad (3)$$

$$\xi = \frac{\mathrm{Im}\langle \pi\pi(I=0) | \mathcal{L}_w | K^o \rangle}{\mathrm{Re}\langle \pi\pi(I=0) | \mathcal{L}_w | K^o \rangle} \qquad (4)$$

and M_{12} is the K^o - $\overline{K}^o$ transition mass matrix defined as

$$\langle K^o | \mathcal{L}_w | \overline{K}^o \rangle = 2m_K M_{12}$$

The ratio ε_m/ξ is a measure of the importance of the transition mass matrix relative to the direct interactions. Experimentally we have[13]

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = -0.003 \pm 0.015 \tag{5}$$

corresponding to $\frac{\xi}{\varepsilon_m} = 0.03 \begin{matrix} + 0.25 \\ - 0.13 \end{matrix}$.

showing that CP-violating effects are almost exclusively due to the $K^o - \overline{K}^o$ transition mass matrix.

In the simplest version of the Higgs boson exchange model with the t quark neglected and $m_H >> m_c$, the box diagram with one Higgs and one W exchange (WH) is the main contribution to the short distance $\Delta S = 2$ CP violating interactions responsible for $K_S^o - K_L^o$ transition and is given by[6-8]

$$\mathcal{L}_-^{\Delta S=2} = \tilde{g}\, \bar{d}_i\, \gamma_\mu(1+\gamma_5)s_j \quad \partial_\nu[\bar{d}_j\, \gamma^\mu\, \gamma^\nu(1-\gamma_5)s_i] \tag{6}$$

where

$$\tilde{g} = \frac{G_F^2}{32\pi^2}\, m_c^2\, m_s(\cos\theta_c \sin\theta_c)^2 \sum_{i=1}^{2} \frac{\mathrm{Im}\, \gamma_i^*}{m_{H_i}^2} \tag{7}$$

with γ_i in general complex having a phase δ_H responsible for CP violation.

The $\Delta S = 1$, CP violating direct interactions is given by the Penguin type diagram which gives rise to a direct coupling of gluon to s and d quark (Fig. 1)

$$\mathcal{L}_{-}^{\Delta S=1} = i\,\tilde{f}\,\bar{d}\,\sigma^{\mu\nu}(1-\gamma_5)\lambda_a s\,F^a_{\mu\nu} \qquad (8)$$

where $F^a_{\mu\nu}$ is the gluon field strength tensor and $\tilde{f}$ is given by

$$\tilde{f} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\frac{g_s}{32\pi^2}\,m_c^2\,m_s\cos\theta_c\sin\theta_c \times \sum_{i=1}^{2}\frac{\mathrm{Im}\,\gamma_i^*}{m_{H_i}^2}\left[\ell n\,\frac{m_{H_i}^2}{m_c^2} - \frac{3}{2}\right] \qquad (9)$$

At the operator level, we see immediately that the coefficient of $\mathcal{L}_{-}^{\Delta S=1}$ is larger than that of $\mathcal{L}_{-}^{\Delta S=2}$ by a factor $\ell n\,\frac{m_H^2}{m_c^2}$ which can be substantial for $m_H^2 >> m_c^2$. Evaluations of the matrix elements of (6) and (8) using vacuum approximation by D & S or the MIT bag model by Donoghue et al. give

$$\frac{\xi}{\varepsilon_m(\mathrm{Box})} \simeq 2.6\left(\ell n\,\frac{m_{H_1}^2}{m_c^2} - \frac{3}{2}\right) \sim 7\ , \text{ for } m_{H_1} \sim 10\mathrm{GeV} \qquad (10)$$

which indeed shows that

$$\varepsilon_m(\mathrm{BOX})/\xi << 1$$

Thus Eq. (10) is clearly in conflict with experiment (Eq. (5)). This conclusion remains valid when the t-quark contribution and the double-Higgs exchange diagrams (HH) are included.[8] Without other contributions to K^o-$\bar{K}^o$ transition mass matrix, it seems that the Higgs-boson exchange models (and their variation) would be in trouble and could be ruled out as concluded by D & S and by Donoghue et al. This is however not the case since the dispersive part of $\langle K^o|\mathcal{L}_w(\Delta S=2)|\bar{K}^o\rangle$ arising from 2nd order perturbation with respect to $\mathcal{L}_w(\Delta S=1)$ has not been included in their analysis. Because of the suppression of $\varepsilon_m(\mathrm{Box})/\xi$ in this model, ε_m/ξ receives a dominant contribution from the dispersive part which must now be estimated. Using the definitions (3) and (4), the ratio ε_m/ξ is given by

$$\frac{\varepsilon_m}{\xi} = \left(\frac{\mathrm{Im}\langle K^o|\mathcal{L}_-^{\Delta S=2}|\bar{K}^o\rangle}{\mathrm{Im}\langle\pi\pi(I=0)|\mathcal{L}_-^{\Delta S=1}|K^o\rangle}\right) \times \left(\frac{\mathrm{Re}\langle\pi\pi(I=0)|\mathcal{L}_+^{\Delta S=1}|K^o\rangle}{\mathrm{Re}\langle K^o|\mathcal{L}_-^{\Delta S=2}|\bar{K}^o\rangle}\right) \qquad (11)$$

where the $\pm$ subscripts denote respectively the CP conserving (even) and CP violating (odd) parts of $\mathcal{L}_w$.

To estimate (11) we shall first show that $\mathcal{L}_{\pm}^{\Delta S=1}$ being I=1/2 operators transform as (1,8) representation of $SU(3) \times SU(3)$. This can be easily seen for the CP-conserving part $\mathcal{L}_{+}^{\Delta S=1}$ which is obtained from the Penguin diagram and is of the form :

$$\mathcal{L}_+^{\Delta S=1} = C_+ \sum_a J_\mu^a \bar{d} \gamma_\mu (1+\gamma_5)\lambda^a s$$

where J_μ^a is the color octet gauge vector currents transforming as singlet under $SU(3 \times SU(3)$ (flavor SU(3)). Since the color octet $\Delta S=1$ left-handed currents $\sum_a \bar{d} \gamma_\mu (1+\gamma_5)\lambda^a s$ belong to (1,8) representation, $\mathcal{L}_+^{\Delta S=1}$ contains only (1,8) terms. noting that the one-gluon exchange contribution to $\Delta S=1$ transition induced by the Penguin $\bar{s}d$ gluon vertex is given by

$$\mathcal{L}_-^{\Delta s=1} = (i)^2 \int d^4x\, D_{\mu\nu}^{ab}(x)\, T\{K_\mu^a(x) J_\nu^b(0)\}$$

where

$$K_\mu^a = i\tilde{f}\, \partial_\nu [\bar{s}\sigma_{\mu\nu}(1+\gamma_5)\lambda^a d]$$

and J_μ^a is the color octet gauge vector currents invariant under $SU(3) \times SU(3)$. Since $\mathcal{L}_-^{\Delta S=1}$ contain no ultraviolet divergent terms, no renormalization is necessary and the hadronic matrix elements of

$\mathcal{L}_-^{\Delta S=1}$ are finite (i.e. Lambshift contribution). This situation is similar to the regularised part of the one-photon contributions to $\mathcal{L}$e.m in hadron e.m massshifts and $\eta \to 3\pi$ decay where the tadpole u_3-term has been subtracted by renormalization[14,15]. Since no anomalous commutator due to u_6 or u_7 - like piece is present, the $SU(3) \times SU(3)$ properties of $\mathcal{L}_-^{\Delta S=1}$ is determined by K_μ^a

($SU(3) \times SU(3)$ generators commute with J_μ^a). From the equation of motions for the quark field operators and using equal time commutation relations[16], we see that K_μ^a contains only $(3,\bar{3})$ and (1,8) pieces. The (1,8) piece is proportional to the current quark masses since in the limit of vanishing quark masses, the 4-momentum operator commute with the $SU(3) \times SU(3)$ generators so that $\partial_\mu[\bar{s}\sigma_{\mu\nu}(1+\gamma_5)d]$ transform like $\bar{s}\sigma_{\mu\nu}(1+\gamma_5)\lambda^a d$ which is a $(3,\bar{3})$ piece. Lorentz invariant suggest that the (1,8) piece must be of the form

$$\sum_a m_s J_\mu^a \bar{s}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\lambda^a d$$

which has been previously found by Hill in an estimate of the contribution to CP-conserving K decays by a similar magnetic Penguin operator[17]. The $(3,\bar{3})$ terms denoted by (u'_7, v'_6) etc. transform exactly like the (u_i, v_i) of the $(3,\bar{3})$ quark mass term under $SU(3) \times SU(3)$. In a nonlinear realisation of $SU(3) \times SU(3)$ they can be given in terms of the pseudoscaller coupling matrix M as[18,19]:

$$u'_7 = Tr\{\lambda_7(M + M^+)\}$$

$$v'_6 = Tr\{\lambda_6(M - M^+)\}$$

with M satisfying the unitary condition $MM^{+}=1$ and can be expanded in terms of the pseudoscalar meson fields $\phi_i (i=1,\ldots,8)$ as :

$$M(f\phi) = 1+2if\phi + 2(if\phi)^2 + \ldots$$

where $$\phi = \sum_{i=1,8} \phi_i \frac{\lambda_i}{\sqrt{2}}$$

f is the inverse of the pion decay constant $(f^{-1} = f_\pi = m_\pi)$. Assuming that $SU(3) \times SU(3)$ is broken by the mass term

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{8f^2} \mathrm{Tr}\ \{a + b\lambda_8)(M + M^{+})\}$$

then after a straightforward calculation one finds that u'_7 and v'_6 are proportional to the divergences of the vector and axial vector currents :

$$u'_7 = \partial_\mu V_{6\mu}$$

$$v'_6 = \partial_\mu A_{6\mu}$$

which can be discarded from the nonlinear phenomenological Lagrangian without affecting the physics ($V_{6\mu}$ and $A_{6\mu}$ contain only 1st derivative of the pseudoscalar meson field operators). Note that the ability to throw away u'_7, v'_6 terms depends crucially on the nonlinear realization of $SU(3) \times SU(3)$ symmetry since at the quark level (u'_i, v'_i) and (u_i, v_i) $(i = 0,1,\ldots 8)$ are two distinct sets of $(3,\bar{3})$ and $(\bar{3},3)$ operators. This again reminds us of the phenomenological

Lagrangian approach as a powerful technique in dealing with current Algebra and soft pion processes.

We can thus assume that the effective Lagrangian for direct CP-violating K decays involves only (1,8) terms to 1st order in $SU(3) \times SU(3)$ symmetry breaking parameter (current quark mass) although we do not know haw to separate this piece from $K_\mu^a J_\mu^a$ in a simple manner. This is sufficient for our purpose since all we need is the $SU(3) \times SU(3)$ transformation properties of $\mathcal{L}_-^{\Delta S=1}$. We can now write down the nonlinear phenomenological Lagrangian for $\mathcal{L}_-^{\Delta S=1}$ in terms of M us :

$$\mathcal{L}_-^{\Delta s=1} = \tilde{f} \, Tr \, \{\lambda_7 \partial_\mu M \partial_\mu M^+\}$$

since only derivative coupling is allowed for (1,8) piece. This follows from a beautiful theorem due to Coleman, Wess and Zumino on the nonlinear realization of chiral symmetry[19,20]. The K-π transition and $K \to 2\pi$ decay amplitudes are then quadratic in momenta for both the CP-conserving and CP-violating direct decays. In this case the Callan-Treiman relation should be also valid for the CP-violating $K_S \to 3\pi$ and $K_L \to 2\pi$ decay amplitudes in the Higgs models.

Measurements of $K_S \to 3\pi$ decay is needed to confirm this $SU(3) \times SU(3)$ transformation properties for $\mathcal{L}_-^{\Delta S=1}$. Eq.(11) can now be expressed in terms of the matrix elements $<\pi^o | \mathcal{L}_+^{\Delta S=1} | K^o>$ defined in the soft pion limit ($p_{\pi^o} = p_{K^o}$) $p^2_{K^o} = m_K^2$) and is given by :

$$\frac{\varepsilon_m}{\xi} = \left(\frac{\mathrm{Im}<K^o|\mathcal{L}_-^{\Delta S=2}|\overline{K}^o>}{\mathrm{Im}<\pi^o|\mathcal{L}_-^{\Delta S=1}|K^o>}\right) \times \left(\frac{\mathrm{Re}<\pi^o|\mathcal{L}_+^{\Delta S=1}|\overline{K}^o>}{\mathrm{Re}<K^o|\mathcal{L}_+^{\Delta S=2}|\overline{K}^o>}\right) \qquad (12)$$

The CP-conserving matrix element $<\pi^o|\mathcal{L}_+^{\Delta S=1}|K^o>$ can be obtained from the $K_S^o \to 2\pi$ decay amplitude. For $p_{\pi^o} = p_{K^o}$, we have

$$a^+_{K^o\pi^o} = <\pi^o|\mathcal{L}_+^{\Delta S=1}|K^o> = \left(\frac{cG_F}{\sqrt{2}}\right) \frac{m_K^2 f_\pi^2}{\sqrt{2}} \qquad (13)$$

where f_π is the pion decay constant ($f_\pi = m_\pi$) and c is a parameter calculated from the $K_S^o \to 2\pi$ decays rates by Cronin as[18]

$$c = 1.1 \pm 0.1$$

Note that the off-shell $K_S^o(k) \to \pi^o(p) + \pi^o(q)$ amplitude is given by

$$A(oo) = -\frac{i\, cG_F}{2} (2k^2 - p^2 - q^2)\, f_\pi \qquad (14)$$

The matrix element $<K^o|\mathcal{L}_+^{\Delta S=2}|\overline{K}^o>$ is given by the $K_S^o - K_L^o$ mass difference taken from experiment.[21]

$$\mathrm{Re}<K^o|\mathcal{L}_+^{\Delta S=2}|\overline{K}^o> = -3.52 \times 10^{-5} \times (G_F\, m_p^2)^2\, m_K \times \mathrm{GeV} \qquad (15)$$

Consider now the dispersive part of $<K^o|\mathcal{L}_-^{\Delta S=2}|\overline{K}^o>$. Assuming that $\mathcal{L}_\pm^{\Delta S=1}$ are local operators, 2nd order perturbation in $\mathcal{L}_\pm^{\Delta S=1}$ gives :

$$\langle K^o | i \mathcal{L}_-^{\Delta S=2} | \bar{K}^o \rangle = (i)^2 \int d^4 x \, \langle K^o | T \{ \mathcal{L}_w^{\Delta S=1}(x) \, \mathcal{L}_w^{\Delta S=1}(0) \} | \bar{K}^o \rangle \qquad (16)$$

with

$$\mathcal{L}_w^{\Delta S=1} = \mathcal{L}_+^{\Delta S=1} + \mathcal{L}_-^{\Delta S=1}$$

(16) can now be evaluated using covariant perturbation theory or dispersion relation. It can be conveniently considered as the scattering amplitude of zero momentum spurion $\mathcal{L}_w^{\Delta S=1}(x)$ on K^o and is assumed to be dominated by low-lying intermediate states which are the π^o, η, η' pole contributions (pole dominance approximation) (Fig. 2).

We have :

$$\mathrm{Im}\langle K^o | \mathcal{L}_-^{\Delta S=2} | \bar{K}^o \rangle = +2 \sum_{i=\pi^o,\eta,\eta'} \frac{(\mathrm{Im}\, a^-_{iK^o}) \, \mathrm{Re}\, a^+_{\bar{K}^o i} \; (\text{Penguin})}{(m_K^2 - m_i^2)} \qquad (17)$$

where

$$a^-_{iK^o} = \langle i | \mathcal{L}_-^{\Delta S=1} | K^o \rangle$$

is the CP violating i-K^o transition matrix elements of $\mathcal{L}_-^{\Delta S=1}$ given in (8). The contribution from low-lying intermediate states in (17) can be represented by $d\bar{d}$ and $s\bar{s}$ intermediate states with strong QCD radiative corrections due to the exchange of soft gluons (which give rise to these hadronic boundstates) as shown in Fig. 2. We have assumed the CP violating $a^-_{iK^o}$ is caused by the Penguin diagrams for the $s \to d$ + gluon transition. Thus the $u\bar{u}$ and $c\bar{c}$ intermediate states do not contribute to (17) and the CP conserving $a^+_{\bar{K}^o i}$ are given by the Penguin contributions alone. For these contributions we have the

following relations :

$$a^{\pm}_{K^o\eta} = \frac{1}{\sqrt{3}}\, a^{\pm}_{K^o\pi^o}$$

$$a^{\pm}_{K^o\eta'} = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\, a^{\pm}_{K^o\pi^o} \qquad (18)$$

Note that the pseudoscalar meson nonet are defined in terms of the $q\bar{q}$ states as follows :

$$\pi^o = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$$

$$\eta_8 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$$

$$\eta_o = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$$

Because of large cancellation between π^o and η pole in Eq. (17) in the exact SU(3) limit, the pseudoscalar meson pole contributions are quite sensitive to $\eta - \eta'$ mixing as well as deviations from exact SU(3) relation between $a^{\pm}_{K^o\pi^o}$ and $a^{\pm}_{K^o\eta}$ (Eq.(18)). These effects must now be taken into account. This can be most easily done by noting that since $d\bar{d}$ and $s\bar{s}$ valence quark participate in Penguin interactions (Fig.1), K^o-$(q\bar{q})_o$-transition can be obtained from the following phenomenological Lagrangian :

$$\mathcal{L}^{\Delta S=1}_{\pm} = C^{\pm}\, \frac{G_F}{\sqrt{2}}\; f_K\, f_{q\bar{q}}\; \partial_\mu K^o\, \partial_\mu \varphi_{q\bar{q}} \qquad (19)$$

consistent with SU(3) X SU(3) properties.

$\varphi_{q\bar{q}}$ is the pseudoscalar field operator associated with $(q\bar{q})_o$-state. As a rough estimate of SU(3) violation effects, let us use the quark model and assume that :

$$f_\pi = f_{d\bar{d}}$$

$$f_K = f_{ds} = f_{d\bar{d}}(1+\varepsilon)$$

$$f_{s\bar{s}} = f_{d\bar{s}}(1+\varepsilon) \qquad (20)$$

we have

$$\frac{f_K}{f_\pi} = 1 + \varepsilon \qquad (21)$$

and

$$\frac{a^{\pm}_{K^o\, s\bar{s}}}{a^{\pm}_{K^o\, d\bar{d}}} = \frac{f_{s\bar{s}}}{f_{d\bar{d}}} = 1 + 2\varepsilon + O(\varepsilon^2) \qquad (22)$$

Note that to 1st order in the SU(3) breaking parameter ε, Eqs.(20) reproduce the Gell-Mann-Okubo type relation for the pseudoscalar meson decay constants [22]:

$$4f_K - f_\pi = 3f_{\eta_8} + O(\varepsilon^2) \qquad (23)$$

With $f_K/f_\pi = 1.28$, we obtain

$$\varepsilon = 0.28 \qquad (24)$$

resulting in an important deviation from SU(3) relation between $a^{\pm}_{K^o\pi^o}$ and $a^{\pm}_{K^o\eta}$. Using (22) we find :

$$a^{\pm}_{K^o\eta_8} = \frac{1}{\sqrt{3}}\, a^{\pm}_{K^o\pi^o}(1+4\varepsilon)$$

$$a^{\pm}_{K^o\eta_o} = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\, a^{\pm}_{K^o\pi^o}(1+\varepsilon) \qquad (25)$$

From the $\eta' \to 2\gamma$ decay rate we know[23] that the system $\pi^o - \eta - \eta'$ can be described by the pseudoscalar meson nonet with a $\eta - \eta'$ mixing angle $\theta_p = 10.5^o$ and a possible negligibly small glueball component in the η'. Thus to a good approximation we have :

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_8 \cos\theta_p + \eta_o \sin\theta_p \\ \eta' &= -\eta_8 \sin\theta_p + \eta_o \cos\theta_p \end{aligned} \tag{26}$$

Using (17) we get :

$$\frac{\mathrm{Im} < K^o \mid \mathcal{L}_-^{\Delta S=2} \mid \bar{K}^o >}{\mathrm{Im} < \pi^o \mid \mathcal{L}_-^{\Delta S=1} \mid K^o >} = 2f \times \left(\frac{\mathrm{Re}\, a^+_{K^o \pi^o}}{m_K^2 - m_\pi^2} \right) \left(1 + \frac{m_K^2 - m_\pi^2}{3(m_K^2 - m_\eta^2)} (1+\delta)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{8}{3} \frac{m_K^2 - m_\pi^2}{m_K^2 - m_{\eta'}^2} (1+\delta')^2 \right) \tag{27}$$

where

$$\begin{aligned} \delta &= 4\varepsilon - 2\sqrt{2}\sin\theta_p (1+\varepsilon) \\ \delta' &= \varepsilon + \frac{\sin\theta_p}{2\sqrt{2}} (1+4\varepsilon) \end{aligned} \tag{28}$$

From (27) we see that for $\sin\theta_p > 0$, effect of SU(3) violation and $\eta - \eta'$ mixing tend tocancel out largely, however with $\varepsilon = 0.28$ the overall effect is still large and increases the pole contributions.

Numerically, we find

$$\begin{aligned} \delta &= 0.54 \\ \delta' &= 0.41 \end{aligned} \tag{28'}$$

which increase the η and η' contributions to (27) by a factor of 2.

The expression (27) is independent of the detailed form of the CP-violating $a^{-}_{\pi^o K^o}$ matrix element. f is the fraction of the Penguin contribution to the total $a^{+}_{K^o\pi^o}$ given by (13). Calculations using PCAC[24] and the MIT bag model[25] indicate that f can be a large fraction of the total amplitude (f = 0.75 according to Gilman and Wise[11]).

Using experimental values for the CP-conserving matrix elements, we obtain numerically.

$$\frac{\varepsilon_m(\pi^o,\eta,\eta')}{\xi} = \frac{f}{7} c^2 \times 10^5 \times \left(\frac{f_\pi^2}{m_p^2}\right)^2 \times \left(\frac{m_K}{1\text{GeV}}\right) \times 4.17 = 17.3f \qquad (29)$$

The above result (Eq.(29)) should be taken as a crude estimate for ε_m/ξ since other effects not included in the nonlinear phenomenological Lagrangian (i.e. SU(3) x SU(3) symmetry breaking effects other those given by the mass term and $\pi\pi$ final state interactions etc.) can modify the current Algebra Callan-Treiman type relations. The successful calculation[18] of $K \to 3\pi$ decay amplitude in terms of the $K \to 2\pi$ decay rates (to within 20 %) shows that such effects are small for the CP-conserving part. For the CP-violating part, these effects could be large but it is not expected in any case to modify by a large factor the Current Algebra relation between $K \to 2\pi$ and $K-\pi$ amplitudes which is all we need to arrive at Eq.(29).

Thus the dispersive part due to π^o,η,η' intermediate states (the large distance contribution) gives a large contribution to ε_m/ξ. With f = 0.75, we then get :

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = -\ 0.007 \qquad (30)$$

which is somewhat larger than experiment but of the correct sign. However within experimental errors (Eq. (5)), our value for ε'/ε is not inconsistent with measurements and therefore the Higgs boson exchange model of CP violation is still acceptable.

In obtaining (20) we have assumed pole dominance for the dispersive contribution to $K^o\overline{K}^o$ transition. High mass state contributions (other than η') should be suppressed by the factor $\frac{m_K^2}{m_\Phi^2}$ etc. and need not to be included. The ρ^o and A_1 contributions to the $K^o - \overline{K}^o$ transition given by Greenberg[26] actually vanish when the Field-Current identity is used. This is because the effective Lagrangian used in his calculation is of the current-current form[18] and contains a term

$$\mathcal{L}_+^{\Delta S=1} = C \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \partial_\mu K^o V_{3\mu}$$

which on account of the conservation of the isovector vector currents ($\partial_\mu V_{3\mu} = 0$) can be written as

$$\mathcal{L}_+^{\Delta S=1} = C \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \partial_\mu (K^o V_{3\mu})$$

Using the Field-Current identity (i.e. Vector Meson Dominance) :

$$V_{3\mu} = \frac{m_\rho^2}{f_\rho} \rho_\mu^o + \text{other terms}$$

The coupling of $\mathcal{L}_+^{\Delta S=1}$ to K^o and ρ_μ^o is then given by :

$$\mathcal{L}_+^{\Delta S=1} = C \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \frac{m_\rho^2}{f_\rho} \partial_\mu (K^o \rho_\mu^o)$$

which is a four-divergence and therefore can be discarded from the Lagrangian without affecting the physics. The A_1 contribution vanishes in the same manner. The K^o-ρ^o transitions, if exist, cannot be obtained from the Field Current Identity and the Cronin effective Lagrangian[18] and Greenberg's analysis is inconsistent since Current conservation and Field-Current Identity implies that

$$\partial_\mu \rho_\mu^o = 0$$

as shown by Wessand Zumino and by others. Note that our proof does not rely on this condition. In any case high mass state dispersive contributions to the CP-conserving part of the $K^o-\overline{K}^o$ transition cannot be as large as he claimed since a posteriori these terms should be relatively small compared to the c-quark contribution to the box diagram which constitutes the bulk of the $K_S^o - K_L^o$ mass difference as we now believe. The 2π intermediate states extended from $s = 4m_\pi^2$ to 1 GeV^2 (a typical cut-off momentum) also expected to give a small contribution because of the cancellation between contributions below and above the K^o mass.[28]

Additional short distance contribution to $Im\langle\overline{K}^o|\mathcal{L}_-^{\Delta S=2}|K^o\rangle$ not included in the analysis of D & S and of Donoghue et al. comes from the CP violating $\Delta S = 2$ transition induced by one gluon exchange with the CP conserving part of the s d gluon vertex given by the W exchange and the CP violating part by the Higgs exchange as given by (8). The CP conserving part of the sd gluon vertex gives rise to the usual Penguin interactions[24,29] :

$$\mathcal{L}_+^{\Delta S=1} = -\left(\frac{G_F}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{g_s}{12\pi^2}\ln\frac{m_c^2}{\mu^2}\right)\bar{d}\,\gamma_\mu(1+\gamma_5)\,\lambda_a s \times (g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu)\,A_\nu^a + h.c \qquad (31)$$

Second order perturbation calculation with respect to the total $\Delta S = 1$ interactions then gives the one gluon exchange contribution to the CP violating $K^o - \overline{K}^o$ transition represented by diagrams of Fig. 3. The contribution to ε_m/ξ from these diagrams can be expressed as :

$$\frac{\varepsilon}{\xi}_m \text{ (one gluon exchange)} = -\left(\frac{1}{12\pi^2}\right)\left(\frac{G_F}{\sqrt{2}}\right) \ell n \frac{m_c^2}{\mu^2} \times \frac{\mathrm{Re}\langle\pi^o|\mathcal{L}_+^{\Delta S=1}|K^o\rangle}{\mathrm{Re}\langle K^o|\mathcal{L}_+^{\Delta S=2}|\bar{K}^o\rangle}$$

$$\times\ 2(\sin\theta_c \cos\theta_c)\ \frac{\langle K^o|[i\bar{d}\,\sigma_{\mu\nu}(1-\gamma_5)\lambda_a s][\bar{d}(q_\nu\gamma_\mu - q_\mu\gamma_\nu)(1+\gamma_5)\lambda_a s]|\bar{K}^o\rangle}{\langle\pi^o|[i\bar{d}\,\sigma_{\mu\nu}(1-\gamma_5)\lambda_a s]\frac{1}{q^2}[\bar{d}(q_\nu\gamma_\mu - q_\mu\gamma_\nu)\lambda_a d]|K^o\rangle} \qquad (32)$$

where summation over colours and integration over virtual gluon momenta q are understood.

Using the identity[7]

$$\bar{d}(\gamma_\mu q_\nu - \gamma_\nu q_\mu)s = \left(\frac{m_s+m_d}{2}\right)\bar{d}\,\sigma_{\mu\nu}s + \frac{i}{2}\,\varepsilon_{\lambda\mu\nu\tau}(k'+k)_\lambda\,\bar{d}\,\gamma_\tau\,\gamma_5 s \qquad (33.a)$$

$$\bar{d}(\gamma_\mu q_\nu - \gamma_\nu q_\mu)\gamma_5 s = \left(\frac{m_d-m_s}{2}\right)\bar{d}\,\sigma_{\mu\nu}\,\gamma_5 s + \frac{i}{2}\,\varepsilon_{\lambda\mu\nu\tau}(k'+k)_\lambda\,\bar{d}\,\gamma_\tau s \qquad (33.b)$$

where k', k are respectively the d and s quark momenta and m_s, m_d are the constituent quark masses. If one neglects the second terms in (33.a) and (33.b) and SU(3) violation effects, the operator $\bar{d}(\gamma_\mu q_\nu - \gamma_\nu q_\mu)\gamma_5 s$ will not contribute to K^o-$\bar{K}^o$ transition which is then given by the same operator responsible for CP violating direct K^o-π^o transition apart from the non locality of the later due to the gluon propagator. To estimate (32) we shall assume that these matrix elements are peaked at some value of q^2 given by the mean transverse momentum squared of quark in K and π :

$$\langle q^2\rangle = -\langle p_T^2\rangle$$

The ratio of the matrix elements in (32) is then roughly given by $\langle p_T^2\rangle$ independent of the detailed form of the matrix elements. We have :

$$\frac{\varepsilon_m}{\xi}\ (\text{one gluon exchange}) \simeq -\left(\frac{1}{12\pi^2}\ \ell n\ \frac{m_c^2}{\mu^2}\ \sin\theta_c\ \cos\theta_c\right) \times \left(\frac{c}{3.52}\right) \times \left(\frac{f_\pi^2}{m_p^2}\right)\left(\frac{\langle p_T^2\rangle}{m_p^2}\right)\ \left(\frac{m_K}{1\text{GeV}}\right) \times 10^5 \qquad (34)$$

$$\simeq -\ 0.2$$

for $m_c = 1.5$ GeV, $\mu^2 = 1\ \text{GeV}^2$ and a typical $\langle p_T^2\rangle = 0.25\ \text{GeV}^2$.

This gives a very small contribution to ε_m/ξ of the order 1%-2% relative to the dispersive contribution obtained above Eq.(29)) but of the opposite sign.

Note that our expression for ε_m/ξ given in (23) is independent of α_s as well as QCD enhancement factors and the CP violating parameters (the quantity $\tilde{f}$ defined in Eq. (9)).

Thus in model with CP-violation due to Higgs exchange, the short distance contributions to ε_m/ξ are quite small and ε_m/ξ is given mainly by the large distance dispersive contribution obtained as in (29). Allowing for other possible high energy dispersive contributions, as far as order of magnitude is concerned, we can say that ε_m/ξ can be quite large and can produce ε'/ε consistent with present data unless accidental cancellation occurs between the low energy and high energy dispersive contributions.

REFERENCES AND FOOTNOTES

1. M. Kobayashi and K. Maskawa, Progr. Theor. Phys. 49, 652 (1973).

2. J. Ellis, M.K. Gaillard and D.V. Nanopoulos, Nucl. Phys. B109, 213 (1976).

3. T.D. Lee, Phys. Rev. D8, 1226 (1973), Phys. Rep. 9, 143 (1979).

4. S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 31, 657 (1976).

5. M.B. Gavela et al., Phys. Lett. 109B, 215 (1982) and References to previous works cited therein.

6. N. Deshpande, Phys. Rev. D23, 2647 (1981).

7. A. Sanda, Phys. Rev. D 23, 2647 (1981).

8. J.F. Donoghue, J.S. Hagelin and B.R. Holstein, Phys. Rev. D 25, 195 (1982).

9. Dispersive treatment of $K^{o}-\overline{K}^{o}$ transistion is given in R.E. Marshak, Riazuddin and C.P. Ryan, Theory of Weak Interactions in Particle Physics, Wiley and Sons, New York NY (1969).

10. D. Chang, Phys. Rev. D25, 1318 (1982).

11. F.J. Gilman and M.B. Wise, Phys. Rev. D 20, 2392 (1979).

12. L. Wolfenstein, Phys. Rev. Lett. 13, 180 (1964).

13. For a review on the measurements on CP violation, see K. Kleinknecht, Annu. Rev. Nucl. Sci. 26, 1 (1976).

14. K.G. Wilson, Phys. Rev. 179, 1499 (1969).

15. S. Raby, Phys. Rev. D13, 2594 (1976).

16. M. Gell-Marm, Phys. Rev. 125, 1067 (1962) ;
V. de Alvaro, S. Fubini, G. Furlan and C. Rossetti, in Currents in Hadron Physics, Noth Holland, Amsterdam (1973), p. 110, 375.

17. C.T. Hill and G.C. Ross, Nucl. Phys. B 171, 141 (1980).

18. J.A. Cronin, Phys. Rev_ 161, 1483 (1969).

19. A.J. Cantor, Phys. Rev. D3, 3195 (1969) ; D3, 3205 (1969).

20. S. Coleman, J. Wessand B. Zumino, Phys. Rev. 177, 2239 (1969). See also S. Coleman, in Theory and Phenomenology in Particle Physics, Proceedings of the 1968 Ettore Majorana International School of Physics, Part B, p. 649, Ed. A. Zichichi, Academic Press, New-York (1969)

21. Particle Data Group, Rev. Mod. Phys. 52, 51 (1980).

22. S. Raby, Remark given in the footnote of Ref. 15.

23. G.S. Abrams, et al., Phys. Rev. Lett. 43, 477 (1979).

24. A.I. Vainshtein, V.I. Zakharov and M.A. Shifman, Nucl. Phys. B120, 315 (1977).

25. J.F. Donoghue, E. Golowich, W.A. Ponce and B.R. Holstein, Phys. Rev. D21, 186 (1980).

26. D.F. Greenberg, Nuovo Cimento 56A, 597 (1968).

27. J. Wess and B. Zumino- Phys. Rev. 163, 1727 (1967). N. Kroll, T.D. Lee and B. Zumino, Phys. Rev. 157, 1376 (1967) and other references cited therein.

28. This is confirmed by a recent calculation of Barger et al. . See the discussion giben in footnote 20 of V. Barger et al. , Phys. Rev. D25, 1860 (1982).

29. M.B. Wise and E. Witten, Phys. Rev. D20, 1216 (1979).

FIGURE CAPTIONS

Fig. 1 : Higgs-boson Penguin contribution to direct CP violating $\Delta S = 1$ transition.

Fig. 2a : Dispersive part of the $K^o - \overline{K}^o$ transition due to $d\bar{d}$ and $s\bar{s}$ intermediate states.

Fig. 2b : π^o, η, η' pole contributions to the dispersive part represented by Fig. 2a.

Fig. 3 : One gluon exchange Penguin contribution to CP violating $\Delta S = 2$ transition.

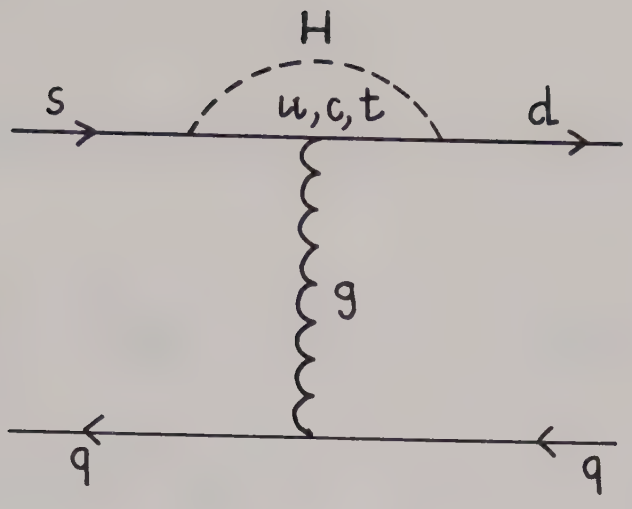


Fig.1

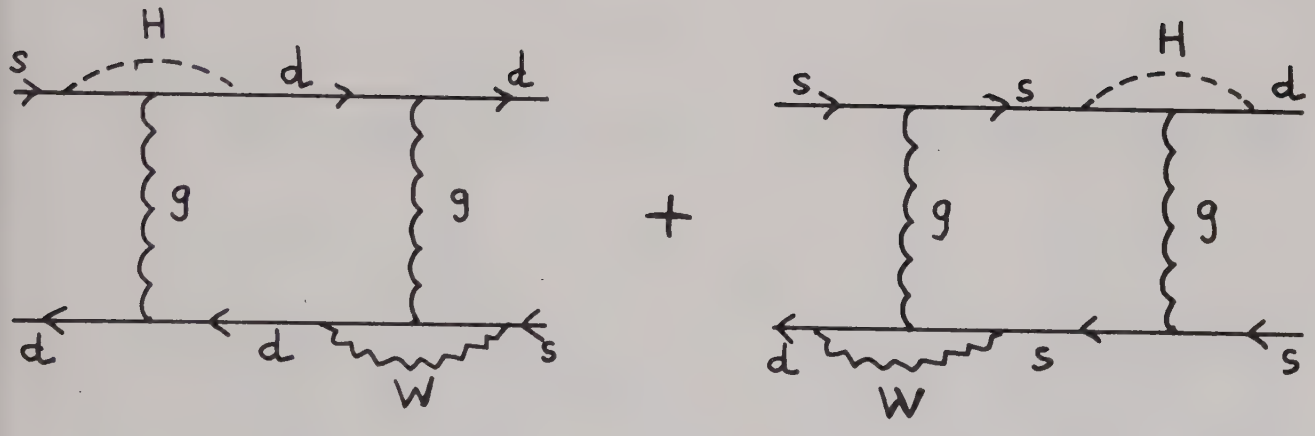


Fig.2a

$\mathcal{L}_-^{\Delta S=1}$
$\mathcal{L}_+^{\Delta S=1}$
K°
π°, η, η'
$\bar{K}°$
+
$\mathcal{L}_+^{\Delta S=1}$
$\mathcal{L}_-^{\Delta S=1}$
K°
π°, η, η'
$\bar{K}°$

Fig. 2b

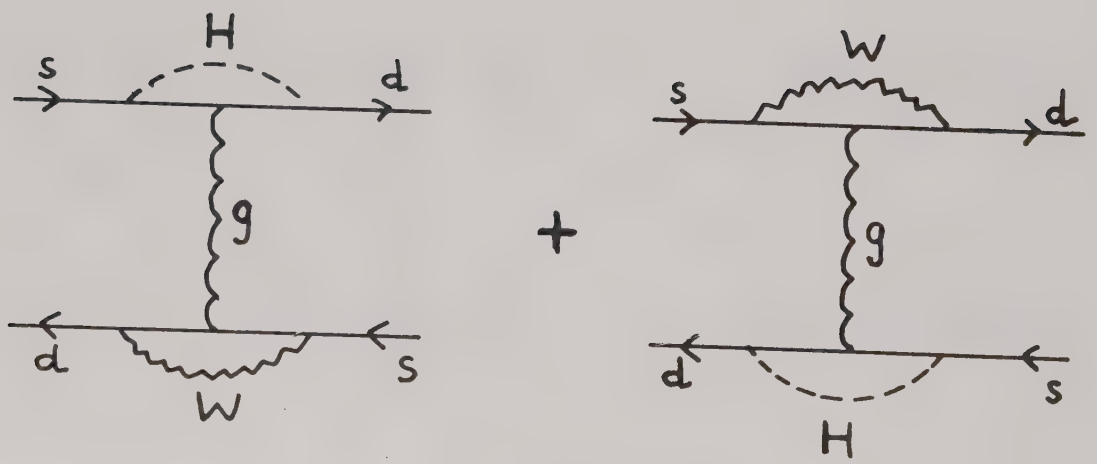

H
s
d
g
d
s
W
+
W
s
d
g
d
s
H

Fig. 3

VI. ANALYSE PHENOMELOGIQUE DE LA CONTRIBUTION DU PINGOUIN

Nous avons déjà évoqué la règle $\Delta I = 1/2$ des désintégrations faibles non leptoniques. Si les interactions non leptoniques sont prises sous la forme courant courant, aucune règle de sélection n'impose la règle $\Delta I = 1/2$ (le lagrangien se décompose à la fois sur les transformations 8 et 27 de SU(3). Le problème est alors de trouver une explication dynamique à cette règle. Le calcul des effets de courte distance dus à la QCD, montre que les coefficients des parties 8 et 27 du lagrangien, sont respectivement

et réduites par rapport au lagrangien des quarks libres. Cependant ces écarts sont insuffisants pour rendre compte des valeurs expérimentales

$$\frac{\langle K | Q^{3/2} | \pi \rangle}{\langle K | Q^{1/2} | \pi \rangle} \simeq \frac{1}{20}$$

Dans l'article suivant, l'amplitude $K \to \pi\pi$ $\Delta I = \frac{3}{2}$ est calculée dans l'approximation de l'insertion du vide et est trouvée être 60 % plus grande que la valeur expérimentale. Cette valeur de 60 % peut être comprise par des effets de brisure de symétrie chirale, d'interaction dans l'état final.

Par contre pour la partie $\Delta I = 1/2$, le même calcul donne un élément de matrice 6 fois plus petit que la valeur expérimentale alors que les corrections à l'inertion du vide doivent être du même ordre que pour $\Delta I = 3/2$. La conclusion est donc qu'il existe d'autres termes qui sont purement $\Delta I = 1/2$ comme l'interaction du type de Pingouin induite par une transition $s \to d$ + gluon.

Comme nous l'avons déjà remarqué, l'élément de matrice du pingouin ne peut être calculé simplement par l'approximation du vide à cause des règles imposées par la symétrie chirale.

Il convient alors de faire une analyse phénoménologique de la contribution des termes $\Delta S = 1$ $\Delta I = 1/2$. Pour cela nous avons étudié la désintégration $K_L \to 2\gamma$. Les termes de courte distance donnés par l'anomalie

axiale est très faible; la majeur contribution vient donc de la partie dispersive (induite par un mélange de $\pi^0 \eta \eta'$ dans K_L) donnée par les diagrammes

ce qui donne, si l'on appelle f la fraction de pingouin dans l'amplitude $a_{K\pi}$:

$$A(K_L \to 2\gamma) = -c \frac{(G_F m_\rho^2)}{\sqrt{2}} \left(\frac{g_{\rho\pi}^2}{m_\rho^2} \right) (2,05 - 1,15 f) A(\pi^0 \to 2\gamma)$$

ce qui s'accorde à la valeur expérimentale si $f \simeq 1$.
On trouve ainsi la confirmation que les opérateurs de type pingouin dominent la transition $\Delta I = 1/2$.

NONLEPTONIC $K \to 2\pi$ DECAY AND $K-\pi$ MATRIX ELEMENT OF EFFECTIVE 4-QUARK OPERATOR

Y. DUPONT
T.N. PHAM

Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau - 91128 Palaiseau - Cedex - France

"Groupe de Recherche du C.N.R.S. n° 48"

ABSTRACT

Assuming $K-\pi$ matrix element dominated by $q\bar{q}$ component in mesons it is shown that $K-\pi$ transition can be computed without a detailed form for the $q\bar{q}$ wave function and is the same as obtained by the vacuum state approximation. Using this result, we find agreement with experiment to some extent for $\Delta I = \frac{3}{2}$ amplitude predicted by the standard model with short distance QCD effects included. The $\Delta I = \frac{1}{2}$ amplitude obtained with only 4-quark operator is too small showing the dominance of Penguin interactions which we argue to be unlikely of the SVZ type. From this result, $\Gamma(K_L \to 2\gamma)$ is calculated and found to agree with measurements to within 30%.

A533.1282 Décembre 1982

With the advent of Quantum Chromo Dynamics (QCD) as a possible theory of strong interactions, some progress has been made during the past ten years towards an understanding of the octet dominance and the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule for nonleptonic Hyperon and Kaon decays within the frame-work of the standard Weinberg-Salam theory of weak interactions. In the works of Gaillard and Lee (GL) and others[1], because of short distance QCD effects, the Wilson coefficients[2] of the (1,8) and (1,27) pieces of the $\Delta S = 1$ 4-quark operator effective Lagrangian are respectivelyenhanced and suppressed by a factor of 2.5 relative to the free field value producing qualitatively an octet enhancement. There are indications that this is not sufficient to account for the large observed octet $\Delta I = 1/2$ amplitude which is larger than the $\Delta I = 3/2$ part by a factor of 20. In fact from PCAC and chiral symmetry constraints one can relate $K \to 2\pi$ amplitude to $K - \pi$ transition matrix elements. From quark counting rule alone, we know that the $K - \pi$ matrix elements for the (1,8) piece is smaller than that for the $\Delta I = 3/2$, (1,27) piece by a factor of 2 leaving only a small enhancement of the $\Delta I = 1/2$ amplitude far below the data. It appears that the standard 4-quark operator of the current × current type cannot be the dominant contribution to non-leptonic decays and that some new operators must be involved. These new operators must transform as (1,8) representation under SU(3) × SU(3) since the Current Algebra Callan-Treiman type relations between $K \to 2\pi$ and $K \to 3\pi$ decays is satisfied to a good accuracy. The usual Penguin type $\Delta S = 1$ interactions[3] advocated by Shifman, Vainshtein and Zakharov (SVZ) are possible new contributions although their relative importance is uncertain since the SVZ estimate for this contribution

is questionable for the simple reason that chiral symmetry property and PCAC constraints are not satisfied by SVZ expression as will be clear in the following discussion. One can however carry out a phenomenological analysis to determine the fraction of the Penguin part relative to the total $\Delta I = \frac{1}{2}$ amplitude. For this purpose one needs to evaluate the $K - \pi$ matrix element from the 4-quark operators of the effective Lagrangian. This matrix element is also related to the $K^o - \bar{K}^o$ transition matrix element of the effective $\Delta S = 2$ operator which is built from the same (V-A) currents and behaves as (1,27) under $SU(3) \times SU(3)$. A knowledge of the matrix element of the 4-quark operator is thus essential to the analysis of nonleptonic K decays and $K_S - K_L$ mass difference. In this paper we shall present an analysis of nonleptonic $K \to 2\pi$ decay based on the valence quark approximation (i.e. only $q\bar{q}$ component in the meson wave function) for $K - \pi$ matrix element (which shows that in the free quark model, the saturation by the vacuum intermediate state is exact). The advantage of using this approximation is that it may be justified to some extent and that the $K - \pi$ matrix element obtained is explicitly quadratic in momentum consistent with chiral symmetry and PCAC constraints. This is not the case with the MIT bag model calculation as the bag model description of the pseudoscalar meson octet considered as Goldstone bosons of the chiral $SU(3) \times SU(3)$ symmetry is rather questionable and the matrix element obtained does not have this momentum dependence explicitly displayed. For this reason we shall not use the bag model in the following. The main results of our analysis can be summarized as follows :

i) $\Delta I = \frac{1}{2}$ amplitude obtained from the standard 4-quark operator is smaller than experiment by a factor of 6 showing that Penguin type contributions must be dominant. It is unlikely that this $\Delta I = \frac{1}{2}$ interactions is of the SVZ Penguin operator.

ii) $\Delta I = \frac{3}{2}$ amplitude is found to be larger than experiment by 60%. This discrepancy can be reduced further by other effects ($SU(3) \times SU(3)$ symmetry breaking, final state interaction) not included in the phenomenological Lagrangian. This tells us that the valence quark approximation for $K - \pi$ matrix element can be trusted to some extent.

iii) $K_L \to 2\gamma$ amplitude induced by the mixing of K_L with π^o, η, η' produces a decay rate in agreement with experiment to within 30% assuming $K_L - \pi^o$ transition dominated by Penguin type operators. This confirms the fact that Penguin interactions must dominate $\Delta I = \frac{1}{2}$ $K \to 2\pi$ decay.

To proceed we present here some important properties of K-π transition and $K \to 2\pi$ decay amplitudes derived from $SU(3) \times SU(3)$ symmetry and PCAC constraints for use in the following analysis.

An elegant way of implementing chiral symmetry and PCAC constraints on Kaon nonleptonic decay amplitudes is to construct a phenomenological effective Lagrangian involving only the pseudoscalar meson fields which transform non-linearly[4-6] under $SU(3) \times SU(3)$ (the usual flavor symmetry). The decay amplitudes are obtained from tree diagrams and satisfy automatically Current Algebra Callan-Treiman type relations in the soft pion limit provided that the effective Lagrangian contains only terms transforming as (1,8) or (1,27) representation

of $SU(3) \times SU(3)$. This is true for the nonleptonic weak interaction effective Lagrangian in the standard Weinberg-Salam theory with left handed V-A currents. Since chirality is not affected by short distance QCD effects, the 4-quark operators in the GL effective Lagrangian contain only (1,8) and (1,27) pieces built from left-handed quark fields of the current × current type. We have[3,7]

$$\mathcal{L}_w(\Delta I = \tfrac{1}{2}) = -\frac{G_F}{2\sqrt{2}} \sin\theta_c \cos\theta_c \, C_1 \, O_1 \tag{1}$$

$$\mathcal{L}_w(\Delta I = \tfrac{3}{2}) = -\frac{G_F}{2\sqrt{2}} \sin\theta_c \cos\theta_c \, C_4 \, O_4 \tag{2}$$

for the main contributions to $\Delta I = \frac{1}{2}$ and $\Delta I = \frac{3}{2}$ amplitudes. The operators O_1 and O_4 are normal ordered and are products of two color singlet V-A currents given by

$$\begin{aligned} O_1 &= \mathcal{H}_A - \mathcal{H}_B \\ O_4 &= \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_B - \mathcal{H}_C \end{aligned} \tag{3}$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_A &= \bar{d}\gamma_\mu \, (1+\gamma_5)u \; \bar{u} \, \gamma_\mu \, (1+\gamma_5)s \\ \mathcal{H}_B &= \bar{u}\gamma_\mu \, (1+\gamma_5)u \; \bar{d} \, \gamma_\mu \, (1+\gamma_5)s \\ \mathcal{H}_C &= \bar{d}\gamma_\mu \, (1+\gamma_5)d \; \bar{d} \, \gamma_\mu \, (1+\gamma_5)s \end{aligned} \tag{4}$$

C_1 and C_4 are Wilson's coefficients due to Q.C.D. short distance effects calculated by Gaillard-Lee and SVZ and known numerically to be 2.5 and 0.4 respectively. These values seem not to depend strongly

on the choice of the QCD mass scale μ. Qualitatively we see thus QCD short distance effects enhance the $\Delta I = \frac{1}{2}$ piece and suppress the $\Delta I = \frac{3}{2}$ piece by a large factor.

The operator responsible for $\Delta I = \frac{3}{2}$ transition is given by Eq. (2) and are the only contribution. However other operators like the Penguin interactions found by SVZ can also be responsible for $\Delta I = \frac{1}{2}$ transition. They can be approximated by a local 4-quark operator of the form[3,7].

$$\mathcal{L}_w(\text{Penguin}) = -\frac{G_F}{2\sqrt{2}} C_5 \sin\theta_c \cos\theta_c O_5$$

$$O_5 = \sum_a J_\mu^a \bar{d}\gamma_\mu (1+\gamma_5) \lambda^a s \qquad (5)$$

with C_5 is 1st order in the QCD coupling constant $\alpha_s(\mu^2)$ and is known to be quite small ($C_5 \sim 0.05 - 0.2$).

J_μ^a are the color octet gauge vector currents transforming as singlet (1,1) representation under flavor SU(3) × SU(3). Since the color octet $\Delta S = 1$ left-handed currents $\bar{d}\gamma_\mu (1+\gamma_5) \frac{\lambda^a s}{2}$ transform as (1,8), the Penguin interactions given by Eq. (1) contain only (1,8) terms and give rise to purely $\Delta I = \frac{1}{2}$ amplitude. Having shown that the $\Delta S = 1$ nonleptonic decay effective Lagrangian contains only (1,8) and (1,27) terms, we can now write down a phenomenological Lagrangian for K-π transition and $K \to 2\pi$ decay. Following Cronin we have for the (1,8) piece[4] :

$$\mathcal{L}_w(\text{octet}) = -\frac{cG_F}{4\sqrt{2}f^4} \text{Tr}\{\lambda_6 \partial_\mu M \partial_\mu M^+\} \qquad (6)$$

where M is a 3×3 pseudoscalar meson coupling matrix transforming as $(3,\bar{3})$ representation of $SU(3) \times SU(3)$ and satisfy the unitary condition $MM^{+} = 1$. M can be expanded in terms of the pseudoscalar meson fields Φ_i $(i = 1,\ldots,8)$ as :

$$M(f\Phi) = 1 + 2if\Phi + 2(if\Phi)^2 + \ldots \tag{7}$$

where

$$\Phi = \sum_{i=1,8} \Phi_i \frac{\lambda_i}{\sqrt{2}}$$

and higher order terms depending on the form of M are irrelevant to K-π transition and $K \to 2\pi$ decays and have been dropped. f is the inverse of the pion decay constant $(f^{-1} = f_\pi = m_\pi)$.

Using (7) we get :

$$\mathcal{L}_w(\text{octet}) = -c \frac{G_F}{\sqrt{2}f^2} \operatorname{Tr}\left(\lambda_6 \partial_\mu \Phi \partial_\mu \Phi + if \lambda_6 \{\partial_\mu \Phi, [\partial_\mu \Phi]\}\right) \tag{8}$$

which is precisely of the form $(V-A) \times (V-A)$.

It is important to note that only derivative couplings are allowed for nonleptonic decay effective Lagrangian. This is <u>the main difference between nonleptonic K decays and electromagnetic (e.m) interactions involving pseudoscalar meson e.m mass difference and $\eta \to 3\pi$ decay</u>[2,5]. The one photon contribution which can have terms behaving like (8,8) and the tad pole u_3 term belonging to $(3,\bar{3})$ can give rise to non-derivative couplings. These important characteristics follow from a beautiful theorem due to Coleman, Wess and Zumino on the non-linear realisation of chiral symmetry[6]. Thus the K-π transition and $K \to 2\pi$ decay amplitudes are <u>quadratic in momenta</u>.

The $\Delta I = \frac{1}{2}$ amplitude for $K_S \to \pi^+\pi^-$ and K-π transition are then given by :

$$A(K_S(p) \to \pi^+(k)\ \pi^-(q)) = i\ \frac{cG_F}{2}\ f_\pi (2p^2-k^2-q^2) \qquad (9.a)$$

$$A(K_o \to \pi^o) = -\frac{A(K^- \to \pi^-)}{\sqrt{2}} = -c\ \frac{G_F}{2}\ f_\pi^2\ q(\pi)\ .\ q(K) \qquad (9.b)$$

The $\Delta I = 3/2$ amplitude is obtained from $\mathcal{L}_w$(27-plet) built from the product $(V-A) \times (V-A)$. It is given by O_4 with the quark fields replaced by the pseudo-scalar meson fields. Thus

$$\mathcal{L}_w(27\text{-plet}) = -c'\ \frac{G_F}{\sqrt{2}}\ [(V-A) \times (V-A)]_{I=\frac{3}{2}} \qquad (10)$$

from which the $\Delta I = \frac{3}{2}$ part of the $K \to 2\pi$ decay amplitude and K-π transition are given by :

$$A(K^-(p) \to \pi^-(k)\ \pi^o(q)) = ic'\ \frac{G_F}{2}\ f_\pi (3p^2-2k^2-q^2) \qquad (11.a)$$

$$A(K_o \to \pi^o) = \sqrt{2}\ A(K^- \to \pi^-) = -c'\ G_F\ f_\pi^2\ q(\pi)\ .\ q(K) \qquad (11.b)$$

In obtaining (9) and (10) we have dropped terms of the form $\partial_\mu\ K_i\ V_{\mu j}$ $(j = 1,2,3)$ which owing to the conservation of the isovector vector currents $(\partial_\mu\ V_{\mu j} = 0)$ can be expressed as a four-divergence and can be therefore discarded without affecting the physics. Thus no terms antisymmetric in pion momenta (e.g. terms of the form $p.(k-q)$ are present in (9.a) and (11.a).

By letting all the meson momenta on the mass shell we get the physical decay amplitudes which are now proportional to $(m_K^2-m_\pi^2)$

and are 1st order in SU(3) symmetry breaking effect. This is in agreement with the theorem of Gell-Mann which tells us that $K \to 2\pi$ decay amplitudes must vanish in the SU(3) symmetry limit[8]. Note also the quadratic momentum dependence of K-π matrix element as mentioned above and any model which does not produce a K-π transition with this property is not acceptable. Similarly the $K \to 3\pi$ decay amplitudes can be obtained from (6) and (10). In particular, the $\Delta I = \frac{1}{2}$ amplitudes obtained with the parameter c determined from $K \to 2\pi$ decay rate reproduce quite well the measured decay rates and the slope parameters[4]. This confirms the validity of the phenomenological Lagrangian approach to nonleptonic decays of K mesons as well as the $SU(3) \times SU(3)$ symmetry properties for the nonleptonic weak interactions.

Our theoretical understanding of Kaon nonleptonic decay is thus reduced to computing c and c' which are obtained from the K-π matrix elements of the $\Delta I = \frac{1}{2}$ and $\Delta I = \frac{3}{2}$ operators respectively. These matrix elements can be computed given the relativistic $q\bar{q}$ wave functions for pseudoscalar mesons. Let us consider first the $\Delta I = \frac{3}{2}$ matrix element of the transition operators given by O_4 in Eq. (2). It is exactly the bound state matrix element of the $\Delta S = 1$ $q\bar{q} \to q\bar{q}$ transitions due to the W exchange process in the limit $m_W^2 \to \infty$ and is given according to the usual prescription by

$$A(K^- \to \pi^-) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(k,k-p)\, T_w(k,k-p\,;\,k',k'-p) \times \psi(k',k'-p) \tag{12}$$

where trace over quark loop is to be taken whenever appropriate and $T_w(k,k-p\,;\,k',k'-p)$ (or simply T_w) is the virtual $\Delta S = 1$ $q\bar{q} \to q\bar{q}$ transition matrix element.

Since the short distance QCD effects have already been factorized out and absorbed into C_4 the K-π matrix elements do not depend on the $q\bar{q}$ wave function at short distance and T_w can be taken to be independent of the virtual quark momenta and is given by the free quark matrix elements of O_4. The integrations over vitrual quark momenta k,k' can be carried out independently and the matrix elements thus obtained depend only on the long-distance matrix elements $<0|:\bar{q}\gamma_5 q:|\pi>$ and $<0|:\bar{q}\gamma_\mu\gamma_5 q:|\pi>$ which appear in the Wilson's short-distance expansion of the meson wave function[9]. The s-channel annihilation part of T_w for $K^-\text{-}\pi^-$ transition is identified with $\mathcal{H}_A$ and is given by :

$$<K^-|\mathcal{H}_A|\pi^->\ =\ \mathrm{Tr}\ \{\gamma_5(a+b\not{p})\ \gamma_\mu(1+\gamma_5)\}\ \mathrm{Tr}\ \{\gamma_\mu(1+\gamma_5)\ \gamma_5(a-b\not{p})\} \qquad (13)$$

where

$$\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\psi(k,k-p)\ =\ \gamma_5(a+b\not{p}) \qquad (14)$$

a and b are scalar function of p^2 (the meson momentum) and considered to be independent of p^2 in the limit of chiral symmetry where the pseudoscalar meson octet are massless Goldstone bosons. More precisely we have :

$$\begin{aligned} 4a &= <0|:\bar{q}\gamma_5 q:|\pi> \\ -4b\ p_\mu &= \frac{ip_\mu}{f} = <0|:\bar{q}\gamma_\mu\gamma_5 q:|\pi> \end{aligned} \qquad (15)$$

In the phenomenological Lagrangian for K decays we have neglected all SU(3) violation effects other than those given by the mass terms.

The $K-\pi$ matrix elements in Eqs. (10) and (11) should be therefore computed only in SU(3) limit given by

$$f_K = f_\pi = f^{-1}$$

Eq. (13) then give

$$\langle K^- | \mathcal{H}_A | \pi^- \rangle = f_\pi^2 \, p^2 \qquad (15')$$

which has been obtained previously using the approximation by the vacuum intermediate state[10]. This is not surprising since we know from (12) that only quark field operators which annihilate π^-, K^- are present in $\mathcal{H}_A$.

The t-channel exchange part of T_w is given by :

$$\langle K^- | \mathcal{H}_B | \pi^- \rangle = \frac{1}{3} \, \mathrm{Tr} \, \{\gamma_5 (a+b\not{p}) \, \gamma_\mu (1+\gamma_5) \, \gamma_5 (a-b\not{p}) \, \gamma_\mu (1+\gamma_5)\} \qquad (16)$$

where the factor 1/3 comes from color counting.

In terms of f_π we thus have

$$\langle K^- | \mathcal{H}_B | \pi^- \rangle = \frac{1}{3} \, f_\pi^2 \, p^2 \qquad (16')$$

It is important to note that <u>because of the (V-A) × (V-A) structure of</u> $\mathcal{H}_B$, <u>only b-term contributes to (16)</u> and the matrix element thus obtained satisfies PCAC constraints. The same result can also be obtained from a Fierz transformation of $\mathcal{H}_B$ into an annihilation term as usually done in the literature [3,7]. Note also that once a and b can be expressed in terms of measurable quantities as given by (15), <u>no detailed knowledge of the $q\bar{q}$ wave function is needed</u> for $K-\pi$ matrix elements.

For $\mathcal{H}_C$ term, we have similarly

$$\langle K^- | \mathcal{H}_C | \pi^- \rangle = 0$$

Hence

$$\langle K^- | O_4 | \pi^- \rangle = \frac{4}{3} f_\pi^2 p^2 \tag{17.a}$$

$$\langle K^o | O_4 | \pi^o \rangle = \sqrt{2} \langle K^- | O_4 | \pi^- \rangle = \frac{4}{3} \sqrt{2} f_\pi^2 p^2 \tag{17.b}$$

which obey $\Delta I = \frac{3}{2}$ rule given in Eq. (11.b).

For $\Delta I = \frac{1}{2}$ matrix elements, we get similarly :

$$\langle K^- | O_1 | \pi^- \rangle = \frac{2}{3} f_\pi^2 p^2 \tag{18.a}$$

$$\langle K^o | O_1 | \pi^o \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \; K^- | O_1 | \pi^- = -\frac{\sqrt{2}}{3} f_\pi^2 p^2 \tag{18.b}$$

which clearly obey $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule.

The above expressions for K-π matrix elements are quadratic in momentum and thus satisfy chiral symmetry and PCAC constraints.

By comparing (17) and (18) we have

$$\langle K^- | O_1 | \pi^- \rangle = \frac{1}{2} \langle K^- | O_4 | \pi^- \rangle \tag{19}$$

Eq. (19) is based only on quark counting rule and is expected to be valid even though the mesons may have a $q\bar{q}$ glue component in the wave function. From (9) and (10) we thus have

$$\frac{c'}{c} = \frac{2C_4}{C_1} = \frac{1}{3} \tag{20}$$

(using the SVZ calculated values for C_1 and C_4 ($C_1 = 2.5$, $C_4 = 0.5$)) showing a small enhancement of $\Delta I = \frac{1}{2}$ amplitude far

below the measured values determined from $K_S \to \pi\pi$ and $K^+ \to \pi^+\pi^o$ decay rates. Experimentally[11] we find :

$$|c|_{exp} = 1.04 \pm 0.1 \ , \ |c'|_{exp} = 0.0327 \tag{21}$$

$$\left|\frac{c'}{c}\right|_{exp} = 0.0314$$

Thus Eq. (20) already tells us that the $\Delta I = \frac{1}{2}$ effective Lagrangian of Gaillard-Lee is insufficient to explain the large $\Delta I = \frac{1}{2}$ amplitude. In fact, using (17) and (18) we find :

$$c' = \frac{2}{3} C_4 \sin\theta_c \cos\theta_c$$

$$c = -\frac{1}{3} C_1 \sin\theta_c \cos\theta_c \tag{22}$$

with $C_1 = 2.5$, $C_4 = 0.4$ we get

$$c'(\text{theory}) = 0.053$$

$$c(\text{theory}) = -0.17 \tag{22'}$$

The magnitude of the calculated value of c is smaller than experiment by a factor of 6. Thus almost all the $\Delta I = \frac{1}{2}$ amplitudes must be due to additional $\Delta S = 1$ interactions which are purely $\Delta I = \frac{1}{2}$ and may be of the SVZ Penguin type. Depending on the relative sign of the Penguin and the 4-quark $\Delta I = \frac{1}{2}$ amplitudes (given by (22)), we infer that

$$f = 0.8 \ , \text{ same sign}$$

$$f = 1.2 \ , \text{ opposite sign} \tag{23}$$

where f is the fraction of the Penguin contribution to the total amplitude.

For the $\Delta I = \frac{3}{2}$ amplitude, the calculated value of c' given in (22') is of the right order of magnitude and is only 60% larger than the measured value. A slight reduction of C_4 and inclusion of chiral symmetry breaking effects as well as $I = 2$ $\pi\pi$ final state interactions[12] can bring the discrepancy down to the level of 20-30%. The rough agreement with experiment for the $\Delta I = \frac{3}{2}$ amplitude must be considered as a successful prediction of $\Delta I = \frac{3}{2}$ amplitude from the GL effective Lagrangian considering the use of only a minimal phenomenological Lagrangian consistent with chiral symmetry and other approximations involved. We can also conclude that the use of only the valence quark $q\bar{q}$ component in the wave function is a good approximation and the value for the Penguin fraction given above (Eq. (23)) can be trusted to within 20-30%.

We have thus showed that $\Delta I = \frac{1}{2}$ amplitude must be dominated by Penguin type interactions. SVZ have given an estimate for this contribution using the Penguin operator given by (5) and the valence quark approximation. Using (12) we can express the Penguin K-π matrix element as :

$$<K^- |O_5| \pi^- > = (\frac{16}{3}) \, Tr\{\gamma_5(a+b\not{p}) \, \gamma_\mu(1+\gamma_5) \, \gamma_5(a-b\not{p})\gamma_\mu\} \qquad (24)$$

As pointed out by SVZ , because of the pure vector nature of the gauge vector currents, both a and b contributes to K-π transition. We get

$$<K^- |O_5| \pi^- > = (\frac{16}{3}) \, (16a^2 - 8b^2p^2) \qquad (25)$$

The 2nd term in (25) is quadratic in momentum consistent with PCAC constraints and is given by $f_\pi^2 p^2$ as for the normal O_1, O_4 contribution.

The first term which is obtained from the matrix element $\langle 0|:\bar{q}\,\gamma_5\,q:|\pi\rangle$ (Eq. (15)) is independent of the meson momenta and therefore violates chiral symmetry and PCAC constraints. This term seems to be quite large and has been estimated by SVZ using the standard value for current quark mass. In this way they claimed that K-π matrix element given by (25) is sufficiently large to account for the fraction of the Penguin contribution. This is incorrect since any terms independent of momenta must be discarded as they violate SU(3) × SU(3) property of the Penguin interactions which as mentioned above must belong to (1,8) representation. It is not surprising to realize that the valence quark approximation cannot be used to evaluate the Penguin K-π matrix element. Non-perturbative effects due to spontaneous breakdown of chiral symmetry must be taken into account to restore the quadratic momentum dependence of the K-π matrix element. We do not know how this can be realised in a simple manner. We believe however when this is done, the Penguin K-π matrix element would be of the form

$$\langle K^-|O_5|\pi^-\rangle \sim A\,C_5\left(\ell n\,\frac{m_c^2}{\mu^2}\right) f_\pi^2 p^2\,\sin\theta_c\,\cos\theta_c$$

which is too small to produce the large measured value as no large mass scale is involved besides the factor $\ell n\,\frac{m_c^2}{\mu^2}$. It appears then that some purely $\Delta I = \frac{1}{2}$ operator similar to SVZ Penguin interactions must play a dominant role in the $\Delta I = \frac{1}{2}$ amplitude. For convenience we present here a more pedestriar way to see the quadratic momentum dependence of K-π matrix element for the Penguin operator. Using standard Current Algebra Technique we get :

$$\langle K^-|O_5|\pi^-\rangle = \frac{(p^2-m_\pi^2)}{f_\pi m_\pi^2}\left[ip_\mu \int d^4x \exp(ip.x)\ \langle K^-|T|\{A_\mu^{1+i^2}(x)\ O_5(0)\}|0\rangle + \langle K^-|[Q_5^{1+i^2}\ ,\ O_5]|0\rangle\right] \qquad (26)$$

The commutator piece belongs to (1,8) representation of SU(3) × SU(3) (isospin rotated form of O_5) and in terms of the phenomenological Lagrangian (see Eq. (8)) it is at least bilinear in the pseudoscalar meson field and hence the second term in (26) vanishes. The T-product part can be separated into terms regular as $p_\mu \to 0$ and the pion intermediate state contribution given by

$$\frac{p^2}{m_\pi^2}\langle K^-|O_5|\pi^-\rangle$$

Thus the matrix element $\langle K^-|O_5|\pi^-\rangle$ is given entirely by the regular term and is therefore quadratic in momentum. It may then be possible to calculate K-π matrix element using (26) with PCAC constraints satisfied by the vanishing of the matrix element of the commutator term. We leave this question open to further analysis as we do not know how to evaluate the T-product term at the quark or hadronic level. In any case, as mentioned above the SVZ Penguin operator is unlikely to produce a large $\Delta I = \frac{1}{2}$ amplitude and some other mechanism for $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule must be looked for. We shall assume that this additional interaction is induced by the off-shell $s \to d$ transition (purely $I = \frac{1}{2}$ operator) and transforms as (1,8) representation of SU(3) × SU(3) Using this property we shall now proceed to the calculation of the $K_L \to 2\gamma$ decay rate which can give information on the $\Delta I = \frac{1}{2}$, K-π transition. The long distance part of this amplitude is induced by the mixing of K_L to low lying mesons (η^o,η,η' etc..) and the

short-distance part is given approximately by the $\bar{s}d \to \gamma\gamma$ transition caused by W-exchange. The short distance part has been calculated[10] by Gaillard and Lee and found to be quite small in the chiral symmetry limit and can be ignored. The long distance part (dispersive contribution) is given simply by the π^o,η,η' pole (pole dominance approximation) contribution.

We have :

$$<K_L|\mathcal{L}_w|2\gamma> = \sum_{i=\pi^o,\eta,\eta'} \frac{a_{K_L i}<i|\mathcal{L}_{e.m}|2\gamma>}{(m_K^2-m_i^2)} \tag{27}$$

where $a_{K_L i}$ is the K_L-i transition induced by non-leptonic interactions defined as in (9.a) or (11.a) and $<i|\mathcal{L}_{e.m}|2\gamma>$ is the decay amplitude for pseudoscalar mesons into two photons. In terms of $q\bar{q}$ states, the pseudoscalar meson nonet are defined as follows :

$$\begin{aligned} \pi^o &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}-d\bar{d}) \\ \eta_8 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s}) \\ \eta_o &= \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s}) \end{aligned} \tag{28}$$

We shall assume in the following K_L-i transition is given by $\Delta I = \frac{1}{2}$ (1,8) piece. In the SU(3) limit we have

$$a_{K_L\eta} = \frac{1}{\sqrt{3}}\, a_{K_L\pi^o} \tag{29}$$

Because of large cancellation between π^o and η pole in Eq. (27) in the exact SU(3) limit, the pseudoscalar meson pole contributions are quite sensitive to η-η' mixing as well as deviations from exact SU(3) relation between $a_{K_L\pi^o}$ and $a_{K_L\eta}$ (Eq. 29)).

These effects must now be taken into account. Since $\langle K_L|\mathcal{L}_w|q\bar{q}\rangle$ are related to $\langle 0|\bar{q}\gamma_\mu\gamma_5 q|q\bar{q}\rangle$, SU(3) violation effects in $a_{K_L i}$ are given by the ratio f_K/f_π to a good approximation. This can be most easily seen by noting that the effective Lagrangian responsible for K_L-$(q\bar{q})_{0^-}$ transition is of the $A_\mu A_\mu$ type so that relative to $a_{K_L\pi^o}$, $\mathcal{L}_w$ can be written as :

$$\mathcal{L}_w = -c\,\frac{G_F}{\sqrt{2}}\, f_\pi\, f_{q\bar{q}}\, \partial_\mu K_L\, \partial_\mu \varphi_{q\bar{q}} \tag{30}$$

where $\varphi_{q\bar{q}}$ is the pseudoscalar meson field operator associated with $(q\bar{q})_{0^-}$ state. Eq. (30) gives rise to SU(3) violation effects of $a_{K_L\eta}$ and $a_{K_L\eta'}$, relative to $a_{K_L\pi^o}$. Defining

$$f_\pi = f_{d\bar{d}}$$

$$f_K = f_{d\bar{s}} = f_{d\bar{d}}(1+\varepsilon) \tag{31}$$

$$f_{s\bar{s}} = f_{d\bar{s}}(1+\varepsilon)$$

we have

$$\frac{f_K}{f_\pi} = 1+\varepsilon \tag{32}$$

so that for the Penguin part we have

$$\frac{a_{K_L s\bar{s}}}{a_{K_L d\bar{d}}} = \frac{f_{s\bar{s}}}{f_{d\bar{d}}} = 1+2\varepsilon+O(\varepsilon^2) \tag{33}$$

The non-Penguin amplitude induced by O_1 ($s\bar{d} \to u\bar{u}$ transition) is simply proportional to $f_{u\bar{u}}$ which is just f_π .

Note that to 1st order in SU(3) symmetry breaking parameter ε, (31) reproduce the Gell-Mann-Okubo type relation[13] for the pseudoscalar meson decay constants :

$$4f_K - f_\pi = 3f_{\eta_8} + O(\varepsilon^2) \tag{34}$$

From the $\eta' \to 2\gamma$ decay rate[14], we know that the system $\pi^o - \eta - \eta'$ can be described by the pseudoscalar meson nonet with a η-η' mixing angle $\theta_p = 10.5°$ and a possible negligibly small glueball component in the η' . The observed $\eta,\eta' \to 2\gamma$ decay amplitudes can also be parametrized in terms of the $\pi^o \to 2\gamma$ amplitude and θ_p using this nonet structure. The physical η,η' can thus be defined as

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_8 \cos\theta_p + \eta_o \sin\theta_p \\ \eta' &= -\eta_8 \sin\theta_p + \eta_o \cos\theta_p \end{aligned} \tag{35}$$

Inducing also the non-Penguin contribution, we thus get :

$$\begin{aligned} a_{K_L\eta} &= \frac{a_{K_L\pi^o}}{\sqrt{3}} (1+\delta) \\ a_{K_L\eta'} &= -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a_{K_L\pi^o} (1+\delta') \end{aligned} \tag{36}$$

with

$$\begin{aligned} \delta &= 4\varepsilon f - 2\sqrt{2} \sin\theta_p \left(\frac{3}{2}f - \frac{1}{2} + \varepsilon f\right) \\ \delta' &= f(1+\varepsilon) - \frac{1}{2}(1-f) + \frac{\sin\theta_p}{2\sqrt{2}} (1+4\varepsilon f) \end{aligned} \tag{37}$$

f being the fraction of the Penguin in K_L-π^o matrix element given in (23).

From (37) we see that for $\sin\theta_p > 0$, effects of SU(3) violation and η-η' mixing tend to cancel out largely, however with $\varepsilon = 0.28$ the overall effect is still large and increases the pole contributions. For a large f, the η' contribution becomes considerable and tend to cancel out the η contribution since $A(\eta \to 2\gamma)$ and $A(\eta' \to 2\gamma)$ are of the same sign. Consequently important cancellation between η and η' contribution may occur depending on the value of f.

In terms of $\pi^o \to 2\gamma$ amplitude, we thus obtain :

$$A(K_L \to 2\gamma) = -c \frac{(G_F m_p^2)}{\sqrt{2}} \left(\frac{f_\pi^2}{m_p^2}\right) (2.05 - 1.15f)\, A(\pi^o \to 2\gamma)$$

For purely Penguin interaction, f = 1 and the branching ratio of $\Gamma(K_L \to 2\gamma)$ is calculated to be :

$$BR(K_L \to 2\gamma)_{theory} = 6.57 \times 10^{-4} \qquad (39)$$

to be compared with the measured value[11] :

$$BR(K_L \to 2\gamma)_{exp.} = (4.9 \pm 0.5) \times 10^{-4} \qquad (40)$$

Thus theory agrees with experiment to within 30%. This must be considered as a successful prediction for the decay rate $\Gamma(K_L \to 2\gamma)$ considering the approximation involved. Probably a better agreement can be obtained with $f = 1.1 \sim 1.2$ and we may conclude that Penguin amplitude is likely to be of the opposite sign relative to the normal amplitude given by O_1 contribution in (22).

In the preceding analysis we have seen that $\Delta I = \frac{3}{2}$ $K^+ \to \pi^+\pi^o$ amplitude can be successfully calculated using QCD - suppressed effective current × current interactions and the valence quark approximation for $K-\pi$ matrix element. From this success we concluded that the valence quark approximation is reliable to 20-30% This allows us to compute the free quark box diagram for K_S-K_L mass difference to within this accuracy using this approximation as usually done in the literature[10,15] (i.e. the approximation by vacuum intermediate state). We give here some comments concerning this matrix element.

In the standard model with left-handed currents, the K_S-K_L mass difference is given by the $K^o-\bar{K}^o$ transition induced by the $\Delta S = 2$ operator O_{JJ} of the $(V-A) \times (V-A)$ type[10,15] :

$$O_{JJ} = :\bar{s}\,\gamma_\mu(1+\gamma_5)d\;\bar{s}\,\gamma_\mu(1+\gamma_5)d:$$

which is of the same form as O_1 and O_4 but transforms as (1,27) representation of $SU(3) \times SU(3)$. Using (13) and (16) we then get the usual expression obtained by the vacuum intermediate state approximation :

$$\langle K^o|O_{JJ}|\bar{K}^o\rangle = (\frac{8}{3})\; f_K^2\; p^2 \qquad (41)$$

which is quadratic in momentum in agreement with PCAC constraints. Incidentally we note that the 1-pion intermediate contribution[15] given by Shrock and Treiman is not only <u>unnecessary</u> but also <u>incorrect</u> since their expression has a part which is independent of momentum and therefore violates chiral symmetry constraints. As already pointed

out in the preceding analysis, in the free quark model vacuum intermediate state is the only contribution to K^o-$\bar{K}^o$ matrix element for the simple reason that the Wick ordered operator $:\bar{s}\,\gamma_\mu(1+\gamma_5)d:$ must annihilate K^o. To go beyond the valence quark approximation one would have to include the $q\bar{q}$ glue component in the wave function which is expected to increase the K^o-$\bar{K}^o$ matrix element relative to the valence quark approximation.

We thank Professor T.N. Truong for useful comments and discussions.

REFERENCES AND FOOTNOTES

1. M.K. Gaillard and B.W. Lee, Phys. Rev. Lett. 33, 108 (1974) ; G. Altarelli and L. Maiani, Phys. Lett. 52B, 351 (1974).

2. K.G. Wilson, Phys. Rev. 179, 1499 (1969).

3. M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, and V.J. Zakharov, Nucl. Phys. B120, 315 (1977).

4. J.A. Cronin, Phys. Rev. 161, 1483 (1967).

5. A.J. Cantor, Phys. Rev. D3, 3195 (1969) ; ibid. 3, 3205 (1969).

6. Non-linear phenomenological Lagrangian approach to Current Algebra and Soft pion processes are also developed by J. Wess and B. Zumino Phys. Rev. 163, 1727 (1967) ; S. Weinberg, Phys. Rev. 166, 1568 (1968). See also S. Coleman, J. Wess and B. Zumino, Phys. Rev. 177, 2239 (1969) and S. Coleman in Theory and Phenomenology in Particle Physics, Proceedings of the 1968 Ettore Majorana International School of Physics, Part B, p. 649, Ed. A. Zichichi, Academic Press, New York (1969).

7. J.F. Donoghue, E. Golowich, W.A. Ponce and B.R. Holstein, Phys. Rev. D21, 186 (1980) and References to previous works cited therein.

8. M. Gell-Mann, Phys. Rev. Lett. 12, 155 (1964).

9. S.J. Brodsky, Y. Frishman, G.P. Lepage and C. Sachrajda, Phys. Lett. 91B, 239 (1980) and References to other works quoted there in.

10. M.K. Gaillard and B.W. Lee, Phys. Rev. D3, 897 (1974).

11. Particle Data Group, Review of Particle Properties, Rev. Mod. Phys. 52, (1980).

12. Repulsive final state interactions of the I = 2, system can reduce the $I = \frac{3}{2}$ amplitude. We thank Prof. Truong for pointing this out to us.

13. S. Raby, Phys. Rev. D13, 2594 (1976), Remark given in the Footnote 37.

14. G.S. Abrams et al., Phys. Rev. Lett. 43, 477 (1979).

15. R.E. Shrock and S.B. Treiman, Phys. Rev. D19, 2148 (1979).

VII. AUTRES PHENOMENES OU SE MANIFESTE LA VIOLATION DE CP

CONCLUSION

Dans les chapitres précédents nous avons étudié la violation de CP dans le système K_o $\overline{K}_o$ et vu que principalement du fait des contributions dispersives les modèles de K.M et de Weinberg ne sont aisément distingables l'un de l'autre mais le tous deux d'une théorie super faible ($\epsilon' = 0$). Nous nous proposons dans ce chapitre d'examiner succintement d'autres phénomènes où se manisfeste la violation de CP, l'existence du moment dipolaire du neutron, le système $B_o - \overline{B}_o$ l'asymétrie matière-antimatière dans l'univers et de comparer les prédictions de deux modèles celui de K.M. et celui de Weinberg.

1) Moment dipolaire électrique du neutron

Un moment dipolaire électrique se traduit par la présence du terme purement imaginaire devant le couplage $\bar{\Psi}\, \sigma_{\mu\nu} \Psi\, F^{\mu\nu}$ donnant une interaction du spin de neutron avec un champ électrique ($\vec{\sigma}\,\vec{\varepsilon}$). Une telle transition conserve tous les nombres quantique, aussi des effets dus à l'interaction forte, peuvent se superposer. Il est en effet envisagé que l'interaction forte (QCD) puisse violer CP de la façon suivante : le vide de la QCD est dégénéré et le vide physique apparait comme une combinaison

$$|\theta\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} |n\rangle$$

où n est un entier (nombre de Pontryagin).
Les états à $n \neq 0$ sont dû à des effets non perturbatifs liés aux propriétés topologiques de la théorie de jauge non abélienne. Le paramètre θ ne peut pas être déterminé par un principe physique, aussi est-il arbitraire. Si $\theta \neq 2k\pi$ alors la théorie viole CP. Dans la suite, pour isoler les effets de l'interaction faible nous ignorons cette possibilité de violation par les intetaction fortes.
Comme d'habitude nous ne considérons que les quarks de valence du neutron

d,d,u. A chaque quark, il est possible d'associer un moment dipolaire D_q, le moment dipolaire du neutron étant :

$$D_n = \frac{1}{3}\left(4D_d - D_u\right) \qquad (1)$$

Dans le modèle de Weinberg, les diagrammes contribuant à la transition $q \to q\,\gamma$ et pouvant violer CP sont fig. (1) (exemple dans le cas d)

Nous simplifions le problème en considérant que H_2^+ est beaucoup plus lourd que H_1^+ et que $m_{H_1}^2 \gg m_q^2$ $\quad q = u, c, t, d, s, b$
On obtient une contribution [7] :

$$D_d = -e\,m_d \frac{G_F}{6\sqrt{2}\pi^2} \frac{\mathrm{Im}\,U_1^* V_1}{M_{H_1}^2}\left[c_1^2 m_u^2 \log\frac{m_u^2}{M_H^2} + s_1^2 c_2^2 m_c^2 \log\frac{m_c^2}{M_H^2}\right.$$
$$\left. + s_1^2 s_2^2 m_t^2 \log\frac{m_t^2}{M_H^2} + 3/4\,(c_1^2 m_u^2 + s_1^2 c_2^2 m_c^2 + s_1^2 s_2^2 m_t^2)\right] \qquad (2\,a)$$

et P est donné par des changements immédiats dans (2 a)

$$D_u = -e\,m_u \frac{G_F}{3\sqrt{2}\pi^2} \frac{\mathrm{Im}\,U_1^* V_1}{M_{H_1}^2}\left[c_1^2 m_d^2 \log\frac{m_d^2}{M_H^2} + s_1^2 c_3^2 m_s^2 \log\frac{m_s^2}{M_H^2}\right.$$
$$\left. + s_1^2 s_3^2 m_d \log\frac{m_d^2}{M_H^2} + 3/4\,(c_1^2 m_d^2 + s_1^2 c_3^2 m_s^2 + s_1^2 s_3^2)\right] \qquad (2\,b)$$

Les angles qui apparaissent dans (2) sont ceux de la matrice K.M. Une estimation numérique de (2) donne :

$$\frac{D_n}{e} \sim 5\,10^{-26}\ \mathrm{cm}$$

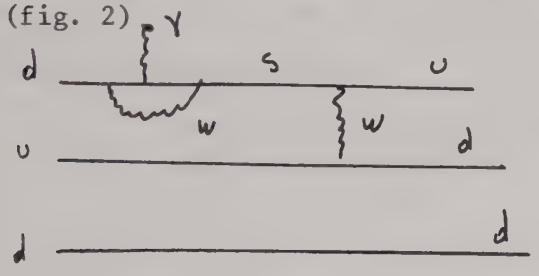
Pour cette évaluation numérique nous avons pris

$m_c = 2\,\mathrm{Gev}$ $\quad m_t = 20\,\mathrm{Gev}$ $\quad m_b = 5\,\mathrm{Gev}$ $\quad c_2 = 1$

Il faut en effet noter que l'angle θ_2 était mal connu, ce calcul est entaché d'une incertitude importante. D'autre part les Higgs neutres peuven peuvent également donner une contribution du même type que le diagramme (1 a). Cependant il n'est pas possible de relier les couplages Higgs-neutres fermions à des paramètres connus. Nous supposerons donc que leur contribution est du même ordre que celle des Higgs chargés et donnons l'extimation suivante de

$$\frac{D_n}{e} \sim 10^{-25 \pm 2} \text{ e.cm} \qquad (3)$$

L'incertitude ± 2 dans l'exposant semble correcte pour prendre en compte l'incertitude dû aux paramètres de K.M. et aux Higgs neutres.
10^{-25} ecm apparaît donc comme une valeur centrale qui est à la limite des bornes expérimentales actuelles.
Le modèle de K.M. prédit également un D_n mais d'un ordre de grandeur beaucoup plus faible. En effet, dans ce modèle D_n ne peut être généré que par une transition du 2ème ordre en G_F, par exemple par un diagramme du type (fig. 2)



On reconnait dans l'état intermédiaire un état du type Hyperon. On obtient alors

$$\frac{D_n}{e} \sim 10^{-24} \text{ cm}$$

En fait d'autres contributions s'ajoutent entre autre celles où intervient une transition du type pingouin, par exemple entre n et Σ^0, Λ^0

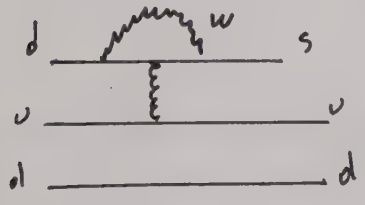


Figure 3

De telles contributions augmentent considérablement D_n et une estimation donne

$$D_n = 10^{-30} \; e \cdot cm \qquad (4)$$

Nous voyons ainsi une très grande différence entre les prédictions de K.M. et du modèle de Weinberg, qui permet de les distinguer expérimentalement. Notons que si l'expérience indique que $D_n < 10^{-27} \; e \cdot cm$ le modèle de Weinberg ne pourra être retenu.

2) Asymétrie dans le système $B_o - \bar{B}_o$

B_o est formé de quarks $d\bar{b}$ et est donc l'analogue de K_o pour la 3ème génération. Nous avons déjà noté au chapitre II que les masses des quarks apparaissant aux vertex dans le modèle de Weinberg, on s'attend à une différence importante dans le comportement de K_o et B_o dans ce modèle.

La méthode la plus directe pour obtenir une violation de CP dans le système $B_o - \bar{B}_o$ est l'asymétrie de charge :
B_o et $\bar{B}_o$ sont produits par l'annihilation e^+, e^- donc en nombres égaux.
Examinons leurs désintégrations semi-leptoniques.

$$B_o \to X^- e^+ \nu$$
$$B_o \to X^+ e^- \bar{\nu}$$

Si CP n'est pas violé on doit observer autant d'événements ℓ^+ que ℓ^-. La phénoménologie du système $B_o - \bar{B}_o$ est identique au cas $K_o - \bar{K}_o$. Les états propres de masse sont

$$B_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2(1+|\varepsilon|^2)}} \left((1+\varepsilon) B_o \pm (1-\varepsilon) \bar{B}_o \right) \qquad (5)$$

ε représente la violation de CP dans la matrice de masse.
Introduisons

$$r = \frac{\Gamma(B^o \to X^- e^+ \nu)}{\Gamma(B^o \to X^+ e^- \bar{\nu})} = \left| \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \right|^2 \frac{\Delta M^2 + (\Delta\Gamma/2)^2}{2\Gamma^2 + \Delta M^2 - (\Delta\Gamma/2)^2} \qquad (6)$$

$$\bar{\Gamma} = \frac{\Gamma(\bar{B}_0 \to X^+ e^- \bar{\nu})}{\Gamma(\bar{B}_0 \to X^- e^+ \nu)} = \left|\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right|^2 \frac{\Delta M^2 + (\Delta\Gamma/2)^2}{2\Gamma^2 + \Delta M^2 - (\frac{\Delta\Gamma}{2})^2}.$$

Alors l'asymétrie de charge est donnée par

$$a_B = \frac{\ell^+ - \ell^-}{\ell^+ + \ell^-} = \frac{\Gamma - \bar{\Gamma}}{2 + \Gamma + \bar{\Gamma}} \qquad (7)$$

où $\ell^\pm$ est le nombre d'événements $\ell^\pm$ observés.

a_B a été calculé soigneusement dans le modèle K.M.. Il faut en effet tenir compte des impulsions externes dans les diagrammes mb n'étant pas négligeable devant m_c!

Le résultat est $a_B \simeq 4\,10^{-4}$

(L'ordre de grandeur est $\varepsilon_{K_0} \simeq 10^{-3}$ qui n'est pas énormément modifié dans le calcul de ε_B , dans le cas de K.M.).

Dans le cas du modèle de Weinberg, le calcul complet n'a pas été fait et s'avère être long. Nous donnons ici une estimation bien que dans le cas de $B_o - \bar{B}_o$ on n'ait pas d'information expérimentale du type $\frac{\Delta\Gamma}{2} = \Delta M$ supposons que

$$|\varepsilon| = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\mathrm{Im}\, M_{12}}{\mathrm{Re}\, M_{12}} \qquad (8)$$

Re M_{12} est donné par l'échange de deux W donc

$$(\mathrm{Re}\, M_{12})_{B_0} = \left(\frac{f_B m_B}{f_K m_K}\right)^2 (\mathrm{Re}\, M_{12})_{K_0} \qquad (9)$$

Im M_{12} est donné par les diagramme en boîte HM et MW compte tenu du fait que les éléments de matrice sont du type pseudo-scalaire, on a

$$(\mathrm{Im}\, M_{12})_{B_0} = \left(\frac{F_B m_B m_b}{F_K m_K m_s}\right)^2 (\mathrm{Im}\, M_{12})_K \qquad (10)$$

où $m_K F_K = \langle 0 | \bar{d} \gamma_5 s | K \rangle$

On obtient

$$\varepsilon_B \simeq \left(\frac{F_B \, g_K \, m_b}{F_K \, g_B \, m_s} \right)^2 \varepsilon_K \qquad (11)$$

avec $\varepsilon_K \simeq 2\,10^{-3}$

en 1ère approximation $a_B = \varepsilon_B$

si $F_B = F_K$ $\quad m_b = 5$ Gev $\quad m_s = 0{,}3$ Gev

$g_B = 0{,}5$ Gev

On obtient $a_B \simeq 0{,}02$.

ou

$$F_B = \frac{g_B \, m_B}{m_b + m_d} \qquad F_K = \frac{g_K \, m_K}{m_s + m_d}$$

(relations données par l'algèbre des courants) alors

$$a_B \geq 0{,}2 \qquad (12)$$

Ainsi, ces estimations grossières montrent une très grande différence entre le modèle de Weinberg et celui de K.M..
Il est donc très important de mesurer cette asymétrie a_B pour départager ces modèles sans ambigüité.

3) Conséquence cosmologique des violations de CP

La violation de CP permet d'expliquer qualitativement l'asymétrie matière-antimatière constatée dans l'univers. Les deux modèles K.M. et Weinberg donnent des prédictions différentes mais il faut avoir à l'esprit que ce ne sont que des évaluations.
Actuellement le nombre de baryons observés dans l'univers est $n_B \simeq 10^{80}$ qui doit être comparé au nombre de photons $n_\gamma \simeq 10^{88}$
Soit

$$\frac{n_B}{n_\gamma} = 10^{-8} \qquad (13)$$

Nous supposerons que dans ses premiers instants l'univers est en équilibre

thermique et que le nombre de baryons est $n_B = 0$. Pour générer $n_B \neq 0$ il est nécessaire que :
le nombre baryonique soit violé par des interactions présentes dans la théorie, ainsi que C.P. Nous travaillerons dans le cadre de la théorie grand unifiée minimale SU(5). Le nombre baryonique est violé par l'intermédiaire des bosons qui existent en triplets de couleur, que nous dénomerons X, et qui peuvent être indifféremment des bosons de jauge ou des bosons de Higgs. Ils se couplent aux lepto-quarks ql et qq, et ont une masse caractéristique de l'ordre de 10^{15} GeV.
Supposons que X ait deux canaux différents de nombre baryonique B_1 et B_2 et de rapport de branchement 2 et 1-2.
$\overline{X}$ se distinguera en $-B_1$, $-B_2$ avec les rapports $\overline{2}$ et $1-\overline{2}$. La variation du nombre baryonique Δ B sera alors

$$\Delta B = \frac{1}{2} (r - \bar{r})(B_1 - B_2) \tag{14}$$

Si N_X est le nombre de X et N le nombre d'états d'hélicité alors

$$\frac{n_B}{n_\gamma} = \frac{N_X}{N} \Delta B \tag{15}$$

Il est donc essentiel que CP soit violé ($r \neq \bar{r}$) pour générer n_B . Dans la théorie SU(5) $\frac{N_X}{N} \sim 10^{-2}$

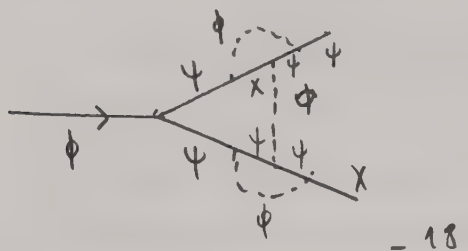
Il nous faut donc comparer les prédictions pour ΔB qui sont reliées à la violation de CP.
Remarquons que si l'on se contente du niveau en arbre $r = \bar{r}$, en vertu de l'invariance CPT. A l'ordre le plus bas ΔB est donc généré par une interférence entre les diagrammes en arbre et ceux à 1 boucle.

Dans le modèle de K.M. les couplages des fermions aux Higgs sont complexes et peuvent s'écrire, introduisant le 5-plet ϕ^α et les fermions χ_m^α $\psi_m^{\alpha\beta}$

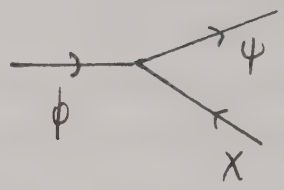
$$\mathcal{L}_Y = (g_1^+)_{mn} \overline{\psi}_{m,\alpha\beta} \chi_n^\alpha \phi^\beta + (g_2)_{m.n} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu\lambda} \psi_m^{\alpha\beta} C \psi_n^{\mu\nu} \phi^\lambda + h.c. \tag{16}$$

(m indice de génération , $\alpha.\beta$ indices de SU(5)).

Dans ce modèle, il est nécessaire, pour générer une interférence complexe, d'étudier des diagrammes à 3 boucles



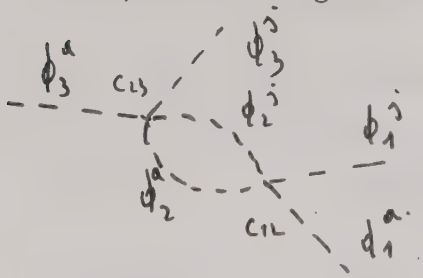
interférant avec

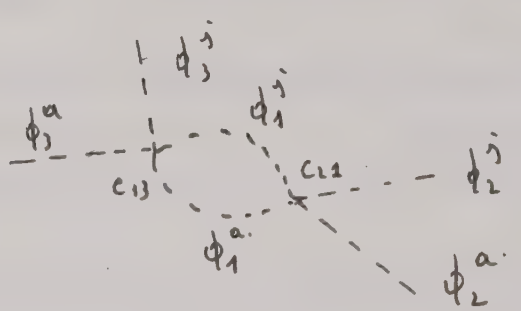


Dans ce cas $\Delta B \sim 10^{-18}$

Dans le modèle de Weinberg nous étudions la phase symétrique, c'est àdire que les fermions sont sans masse, mais CP est violé explicitement dans le secteur des Higgs par le couplage à 3 bosons.
Le lagrangien SU(5) invariant à déjà été donné dans le chapitre II. Etant donné que l'on se place loin de la brisure SU(2)XU(1) $\langle \phi^{\alpha} \rangle = 0$ et les symétries décrites imposées par la condition CNS nous montrent que les ϕ_M^{γ} sont des états propres de masse
Soit φ_i^{α} les bosons de Higgs colorés i = 1,2,3.
Un scénario possible pour la génération de Δ B est le suivant :
Si $M_3 > M_2 > M_1$
$\varphi_3^{a.}$ a deux canaux : $\varphi_1^{a.}$ et 2 Higgs de masse nulle.
$\varphi_2^{a.}$ et 2 " " "

Ces deux canaux évoluent ensuite vers des nombres baryonique différents.
Pour calculer Δ B, il faut considérer l'interférence entre l'amplitude de Born $\varphi_3^{a} \to \varphi_1^{a} \varphi_1^{j} \bar{\varphi}_3^{j} \propto C_{13}$ (j représente un indice de SU(5) non coloré) et les diagrammes à 1 boucle :





Ce qui permet de donner la limite :

$\frac{M_B}{M_Y} < 10^{-4} C$ ou c est une valeur moyenne des couplages C_{ij}. pour que ces calculs aient un sens, il faut que
Ainsi le modèle de Weinberg, peut donner une valeur $\frac{M_B}{M_Y}$ compatible avec la

valeur observée. Cependant nous n'attachons pas une importance trop grande à ces résultats qui ne sont que des évaluations, et compte tenu des incertitudes expérimentales.

Aussi pour conclure nous résumons les divers phénomènes étudiés et les prédictions des deux modèles Weinberg (W) et K.M.

Phénomène	W	K.M
ε'/ε dans $K\bar{K}$	-0,08	-0,05
D_n du neutron	$10^{-25} \pm$ e cm	10^{-30} e cm
$q(B_o^o - \bar{B}^o)$	0,2 -0,02	$2\ 10^{-4}$
$\frac{n_B}{n}$	$< 10^{-5}$	10^{-18}

Ainsi pour conclure cette étude, il nous semble que les expériences suivantes peuvent être d'un intérêt certain :

- raffiner la précision de ε'/ε de $K_o - \bar{K}_o$ afin de voir si la violation de CP est super faible.

- Mesurer a_B, même grossièrement, perttra d'éliminer l'un des deux modèles en concurence.

- Et toujours chercher à mesurer D_n; D_n suffisamment grand n'éliminera pas K.M. étant donné l'effet de l'interaction forte toujours possible mais D_n suffisamment faible ($< 10^{-27}$ e cm) éliminerait le modèle de Weinberg.

VIII - THEORIE GRAND UNIFIEE ET DUREE DE VIE DU PROTON.

Nous avons déjà évoqué dans les chapitres précédents, la théorie $SU(5)$[20]; nous donnons dans ce chapitre plus de détail sur la construction d'une théorie grand unifiée (GUT). De telles théories induisent des transitions entre quarks et leptons, aussi une de leur conséquence est la non conservation du nombre baryonique, soit la possibilité pour le proton de se désintégrer en lepton et mésons. Ces théories prédisent une durée de vie de l'ordre de 10^{29} - 10^{31} années et des expériences sont actuellement réalisées pour vérifier cette prédiction. Il est donc important de calculer précisément la durée de vie du proton τ_p, Ce calcul peut se situer à 2 niveaux. D'une part τ_p dépend de la masse des bosons super lourds M_x comme $1/M_X^4$. M_X peut être relié à des quantités physiques mesurées, au moyen du groupe de renormalisation. Ce calcul a été fait récement en tenant compte des effets de masses[21]. Il est alors facile de dériver un lagrangien effectif pour la transition $p \to \bar{e}$+mesons. Dans les analyses récentes, un modèle de fusion de quarks est utilisé. A cause des la difficulté d'incorporer les effets relativistes dans ce modèle, nous proposons ici un calcul utilisant la technique de l'algèbre des courants qui permet d'imposer à l'amplitude les contraintes dues à la symétrie chirale, et réduit le calcul de l'élément de matrice à la quantité plus simple $\langle \bar{e} | \mathcal{H}_x | p \rangle$ Pour trouver l'amplitude physique, il suffit d'effectuer une extrapolation sur la région physique, utilisant une paramétrisation des effets de résonance de système méson nucléon par une fonction de type Omnès.

1) Modèle SU(5)

Les interaction fondamentales, observées entre les particules sont les interactions faibles électromagnétiques et fortes. Nous avons vu qu'il est possible de les décrire par des théories de jauge, $SU(2) \times U_y(1)$ spontanément brisé en $U_q(1)$ pour les deux premières et $SU(3)$ pour les interactions fortes. Pour chacune de ces forces il est possible de définir des constantes de couplages courantes $\alpha_i(\mu^2)$. Aux énergies actuellement

accessibles ces constantes sont très différentes, mais pour une valeur de $\mu \simeq 10^{14}$ Gev les $\alpha_i(\mu)$ sont égales. D'où l'idée de la grande unification : à haute énergie $(\mu > 10^{14}\,\text{Gev})$ il n'y a qu'une interaction qui est spontanément brisée en 3 interactions aux faibles énergies. Nous pouvons alors décrire cette interaction par une théorie de jauge associée à un groupe simple G, tel que $G \supset SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Le groupe minimal vérifiant cette condition est SU(5) (de rang 4).

Pour construire la théorie, il convient de placer les fermions dans les représentations de SU(5).

Considérons les représentations antisymétriques.

Les fermions pour une génération, sont

$$\begin{pmatrix} u^i \\ d^i \end{pmatrix}_L (3,2) \qquad \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} (1,2) \qquad u_R^i,\ d_R^i \ (3,1) \qquad e_R,\ (1,1) \tag{1}$$

avec entre parenthèse les nombres quantiques associés à $SU(3) \times SU(2)$. Nous Donnons de même la décomposition de 5 et 10 par rapport à $SU(3) \times SU(2)$

$$\begin{aligned} 5 &= (3,1) + (1,2) \\ 10 &= (\bar{3},1) + (1,1) + (3,2) \end{aligned} \tag{2}$$

choisissons d'écrire pour un vecteur de 5 :

$$\underbrace{\phi_1\ \phi_2\ \phi_3}_{SU(3)}\ \underbrace{\phi_4\ \phi_5}_{SU(2)}$$

D'autre part la charge électrique Q est le générateur de $U_q(1)$ et doit donc être un générateur de SU(5), soit $T_2 Q = 0$ sur une représentation irréductible.

Compte tenu de ces contraintes on ne peut concilier (1) et (2) que par

$$5 = (d^1, d^2, d^3, e^+, \bar{\nu})_R \quad \text{ou} \quad \bar{5} = (\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3, \bar{e}, \nu)_L \tag{3.a}$$

La représentation 10 = (5×5) antisymétrique est alors immédiate :

$$10 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{u}_3 & -\bar{u}_2 & u_1 & d_1 \\ & 0 & \bar{u}_1 & u_2 & d_2 \\ & & 0 & u_3 & d_3 \\ & & & 0 & e^+ \\ & & & & 0 \end{pmatrix}_L \qquad (3.b)$$

Ainsi les fermions se rangent dans la représentation 5 + 10 qui est sans anomalies axiales, condition nécessaire.
Les bosons de jauge appartiennent à la représentation adjoint

$24 = (8,1) + (3,2) + (3,2) + (1,3) + (1,1)$.

On reconnait : les gluons (8,1) et les bosons de la théorie électro faible (1,3) + (1,1). (3,2) et (3,2) correspondent aux bosons super lourds X et Y.
Il convient maintenant d'introduire des bosons de Higgs pour briser la symétrie SU(5) en $SU(3) \times U_q(1)$.
La 1ère étape consiste a briser le groupe en $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ qui est de même rang que SU(5) : introduisons alors des Higgs appartenant à la représentation adjointe 24.

ϕ est de la forme

$$\langle \phi \rangle = \phi_0 \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -3/2 & \\ & & & & -3/2 \end{pmatrix} \qquad \phi_0 \simeq 10^{14}\ \text{GeV}$$

Nous sommes maintenant ramenés au cas de Weinberg-Salam : introduisons des Higgs H appartenant à 5 tels que $\langle H \rangle = \rho \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ $\rho \simeq 100\ \text{GeV}$

alors $SU(3) \times SU(2) \times U_y(1)$ est brisée en $SU(3) \times U_q(1)$

ϕ_0 et ρ génèrent les masses des fermions et des bosons de jauge massifs . Les bosons de jauges X et Y ont des masses du même ordre que c'est à dire l'échelle où la symétrie est brisée. La constante de couplage g_{GUT} vérifie une équation de groupe de renormalisation:

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} g_{GUT} = \beta(g)$$

D'autre part on associe à chacune des interactions une constante $g_i(\nu)$
L'échelle de la brisure est définie par $g_i(\nu) = g_{GUT}(\nu)$
pour $\nu = \phi_0$
Faisant l'hypothèse du découplage $\nu \frac{\partial}{\partial \nu} g_i(\nu) = \beta_i(g_i)$
on obtient

$$\frac{1}{g^2_{GUT}} = \frac{1}{g_i^2(\nu)} + 2\beta_i \log \frac{\nu}{m_X}$$

ou encore

$$\log \frac{m_X}{\nu} = \frac{\pi}{11\alpha}\left[1 - \frac{\alpha(\nu)}{\alpha_s(\nu)}\,\frac{8}{3}\right]$$

ou numériquement $M_X \sim 10^{14}$ GeV
Ce résultat est obtenu en utilisant $\sin^2\theta_W = 3/8$, valeur prédite par la structure de groupe uniquement, donc à haute énergie.
Un calcul plus complet faisant intervenir les effets de masse et la brisure de SU(2)X U(1) donne[21] :

$$M_X = 3{,}1 \left(\frac{\Lambda_{\overline{MS}}}{0{,}2}\right)^{1{,}03} 10^{14 \pm 0{,}25}$$

Une fois brisée la théorie redonne bien sûr, les théories habituelles SU(3) (QCD) et SU(2)xU(1). Le fait nouveau est la présence de couplages violant la conservation du nombre baryonique

$$X \to \bar{q}\,\bar{q} \qquad X \to e^+ \bar{q}$$

Considérant les diagramme en arbre, il est alors possible de donner un lagrangien effectif pour les transitions violant B :

$$\mathcal{L} = \frac{4G}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ijk}\left[\bar{U}^c_{kL}\gamma_\mu U_{iL}\left(2\bar{e}^+_L\gamma_\mu d_{jL} + \bar{e}^+_R\gamma_\mu d_{jR} + \bar{\mu}^+_L\gamma_\mu s_{jL}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \bar{\mu}^+_R\gamma_\mu s_{jR} + (\bar{U}_{kL}\gamma_\mu d_{jL})(\bar{\nu}^c_{eR}\gamma_\mu d_{iR} + \bar{\nu}^c_{\mu R}\gamma_\mu s_{iR})\right] + \text{h.c.} \quad (4)$$

avec $G = \frac{g^2_{GUT}}{2\sqrt{2}\,M_X^2}$

Comme dans les chapitres précédents, il convient de tenir compte des effets de courte distance qui seront très importants étant donné les échelles de masse mise en jeu ($M_X \simeq 10^{14}$ Gev $M_p \simeq 1$ Gev)
Le calcul est standard et donne un facteur correctif de[22]

$$\eta = \left(\frac{\alpha_s(M^2)}{\alpha_s(M_X^2)} \right)^{\frac{6}{33-2N_g}}$$

$$\eta \simeq 7,1 \quad \text{pour} \quad N_g = 6 \qquad (5)$$

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier la désintégration du proton en 2 particules non baryoniques : lepton + meson. La théorie SU(5) possède une symétrie globale qui correcpond à la conservation de B-L.
L'article suivant propose un calcul de la durée de vie du proton basé sur l'algèbre des courants. Contrairement à d'autres calculs le terme de pôle qui apparait quand on utilise les théorèmes de pion mous est pris en compte ainsi que les effets dû à l'extrapolation sur la région physique, paramètrisés par les effets de résonance du système mason nucléon par une fonction de type Omnès.

Les différents rapports de branchement des modes à 2 corps sont aussicalculés.
Le temps de vie calculé du proton est alors de $1,0 \cdot 10^{29}$ années. Tenant compte des incertitudes sur la masse du X et sur la fonction d'onde du proton on peut estimer

$$\tau_p \simeq 1 \times 10^{29 \pm 2} \text{ années}$$

Ce résultat est compatible avec la borne expérimentale actuelle ($\tau_p > 10^{30}$ années). Par contre une valeur expérimentale $\tau_p > 10^{31}$ années serait difficilement réconciliable avec le modèle SU(5)

TWO-BODY PROTON DECAYS IN SU(5)

Y. DUPONT
T. N. PHAM
and
Tran N. TRUONG,

Centre de Physique Théorique,
Ecole Polytechnique
91128 - PALAISEAU Cedex France

"Groupe de Recherche du C.N.R.S. n° 48"

ABSTRACT

Assuming a resonance parametrisation to extrapolate the soft pion amplitude to the physical region, we find that meson-nucleon resonance effects suppress most of the Current Algebra $p \to \eta e^+$ decay amplitude but only slightly modify other decay amplitudes. The decays $p \to \omega e^+$ and $p \mapsto \rho^0 e^+$ are also computed using the divergence of the vector currents (or Born term). In the standard SU(5) model, the decay $p \to \pi^0 e^+$, $p \to \omega e^+$ and $p \to K^0 \mu^+$ are the most important modes with branching ratios 40 %, 10 % and 6 % respectively. From the nonrelativistic harmonic oscillator wave function, the proton lifetime is found to be $\tau(p) = 1.02 \times 10^{29}$ yrs for $M_X = 4 \times 10^{14}$ GeV.

A 528.0183

Janvier 1983

I - INTRODUCTION

Apart from the explanation of the quantization of the electric charge and the observed value of the Weinberg's angle $\sin^2\theta_W$ (the electroweak mixing angle), Grand Unified Theories (GUT) predict the existence of a very weak baryon number non-conservation processes which lead to the decay of the proton[1] . This is one of the most important consequence of the theory which can therefore be subjected to experimental test by looking for the proton decay and at present considerable efforts are being devoted to the measurement of the proton lifetime with increasing sensitivity. On the theoretical side, most of the calculations of proton two-body decay modes in the literature are based on the quark fusion model[2] . In this model the two quarks in the proton annihilate each other to produce an anti-lepton and an anti-quark which subsequently recombines with the third quark (the spectator quark) to produce hadrons in the final state. The decay rates depend on the probability to find two interacting quarks at the same point which can be obtained from nonleptonic hyperon decay rates and hadron hyperfine mass splitting[3] . This model (also called the parton model) may be useful in obtaining the inclusive decay rates ($i.e.,\ p \to e^+ X$) which are insensitive to the detailed dynamics of the outgoing quarks, but questions could be raised on its reliability because of the low value of proton mass. With the current values[4] for $\Lambda_{\overline{MS}}$ ($\Lambda_{\overline{MS}} = 0.2$ GeV) and M_X ($M_X = 3.1 \times 10^{14}$ GeV), the current estimate for the proton lifetime is in the range 10^{30} - 10^{31} yrs which are on the boundary of expe-

rimental limits. More information can also be learned from the exclusive two-body decay modes, especially their branching ratios which are independent of the grand unification mass M_X. These two-body rates can be computed using the standard nonrelativistic SU(6) wave function and the quark fusion model as done in the literature[5,6] (The calculated matrix elements are very model dependent) Although the branching ratio for the dominant modes $(\pi^0 e^+, \omega e^+)$ are roughly the same in both the nonrelativistic and relativistic treatment of the quark fusion model, the partial decay rates seem to differ by a large factor[6]. This shows that relativistic effects are important and a covariant relativistic treatment less dependent on the quark dynamics is required. Current Algebra (CA) combined with Dispersion Relation (DR) seem to be most appropriate for this purpose. In this paper we present calculations of two-body decay modes of the proton using standard Current Algebra technique for soft pion processes[7]. Unlike the case of Hyperon S-wave nonleptonic decays where corrections to soft-pion amplitude are less important[7], the two-body decays of proton with an antilepton (e^+, ν^+) and a pseudoscalar meson in the final state requires a large extrapolation from the soft pion limit $(P_e^2 = m_P^2)$ to the physical region $(P_e^2 = m_e^2 \simeq 0)$. This extrapolation can be done by multiplying the soft pion amplitude $(P_e^2 = m_P^2)$ by the Omnès function[8] $D^1(t)$ evaluated at $t = P_e^2 \simeq 0$ which could produce important corrections to the soft pion amplitude because of resonance effects in the meson-nucleon system. This is the so-called hard pion correction. With this correction factor taken into account, the two-body decay amplitudes can be calculated in terms of the transition mass matrix ele-

ment $\langle e^+ | \mathcal{L}_X(0) | p \rangle$ from which SU(6) - like algebraic relations between different decay amplitudes can be derived. To compute $\langle e^+ | \mathcal{L}_X(0) | p \rangle$ (and similar quantities), we shall need the proton wave function at the origin. For convenience we shall use the standard 3-quark nonrelativistic harmonic oscillator wave function. Although the absolute decay rates depend on the detailed form of the wave function, the ratio between different decay amplitudes are determined mainly by its spin-isorpin part and therefore are model independent to a good approximation. We also give a calculation for $p \to \rho^0 e^+$ and $p \to \omega e^+$ decay rates along similar line by making use of the divergence condition for the isoscalar and isovector vector current in the presence of baryon-number violating interactions $\mathcal{L}_X(0)$ and using the Vector Meson Dominance approximation (VMD) to relate the $p\,\rho^0 e^+$ and $p\omega e^+$ coupling constants to the form factors at a the momentum transfer $q^2 = 0$. Our result shows that :

i) Resonance effects in the meson-nucleon system produce corrections to soft-pion amplitudes. These corrections are quite important for the $p \to \eta e^+$ mode which is suppressed by a factor of 10 relative to soft-pion value. For other modes, less important corrections are found and amount to 5 % in amplitude for $p \to \pi^0 e^+$ and $p \to \pi^+ \bar{\nu}_e$ decays.

ii) $\Gamma(p \to \pi^0 e^+)$ is the dominant decay rate with a branching ratio of 40 %.

iii) $\Gamma(p \to \omega e^+) = 9\,\Gamma(p \to \rho^0 e^+)$ is a consequence of the commutation relations which can be understood using the quark counting rule ; this decay mode proceeds with abranching ratio of 10 %.

iv) With standard quark model parameters, total proton life time is found to be

$$\tau(p) = 1.02 \times 10^{29} \text{ yrs}$$

for $M_X = 4 \times 10^{14}$ GeV. This value can be greatly increased by raising the QCD parameter $\Lambda_{\overline{MS}}$.

II - Calculation of Decay into a Pseudoscalar and a Lepton.

1 - *Soft Pion Theorems and Hard Pion Corrections.*

The decay mode $p \to e^+ \pi_0$ is one of the most important mode and the easiest to observe in current experiments. As with the case of non-leptonic decays of Hyperons, Current Algebra and soft pion technique must be used to reduce the decay amplitude to a transition mass matrix element $\langle e^+ | \mathcal{L}_X(0) | p \rangle$ which is simpler to handle than the decay amplitude itself. *This is not only a matter of convenience but also because of* $SU(3) \times SU(3)$ *chiral symmietry and PCAC constraints must be imposed on the amplitude.*

The decay amplitude for $p \to \pi^0 e^+$ is given by

$$\mathcal{M}(p, k, q) = \langle e^+ \pi^0 | \mathcal{L}_X(0) | p \rangle \qquad (1)$$

with p, k, q are respectively the momenta of the proton, the outgoing positron and pion. $\mathcal{L}_X(0)$ is the effective Lagrangian for the baryon number-violating interactions which are mediated by the exchange of a superheavy gauge boson X in grand unified theories (GUT). In SU(5) it is given by [1,2]

$$\mathcal{L}_x = \left(\frac{4G\lambda}{\sqrt{2}}\right)\varepsilon_{ijk}\Big[\bar{\nu}^c_{kL}\gamma_\mu u_{jL}\left(2\bar{e}^+_L\gamma_\mu d_{iR} + \bar{e}^+_R\gamma_\mu d_{iR} + \bar{\nu}^+_L\gamma_\mu s_{iL} + \bar{\nu}^+_R\gamma_\mu s_{iR}\right] + \bar{u}^c_{kL}\gamma_\mu d_{jL}\left(\bar{\nu}^c_{eR}\gamma_\mu d_{iR} + \bar{\nu}^c_{\mu R}\gamma_\mu s_{iR}\right)\Big] \tag{2}$$

G is the effective coupling constant defined by

$$G = g^2_{GUT}/4\sqrt{2}\,m_X^2$$

and λ is the short-distance QCD enhancement factor $(\lambda = 3.7)$. Unless otherwise specified, all the matrix elements below are defined in a covariant manner without the normalisation factor. Thus

$$m(p,k,q) = \bar{u}_{e^+}(k)\,\Gamma(k,q)\,u(p) \tag{3}$$

In the soft pion limit, $q \to 0$, $k \to p$ and the positron momentum is taken off the mass shell $(k^2 \to p^2 = m_p^2)$. Using PCAC and standard current Algebra technique, we have in this limit[6] :

$$\Gamma(p,q)\,u(p) \underset{q\to 0}{=} \frac{-i\sqrt{2}}{g_\pi}\left[\langle 0|\left[Q^5_3, \eta(0)\right]|p\rangle + q_\mu M_\mu(p,q)\right] \tag{4}$$

where

$$M_\mu(p,q) = -i\int d^4x\, \exp(iq\cdot x)\langle 0|T\{\eta(0)\,A_{3\mu}(x)\}|p\rangle \tag{5}$$

and $A_{3\mu}(x)$ is the 3rd isospin component of the isovector axial current and g_π is the pion decay constant $(g_\pi = m_\pi)$. $\eta(x)$ is a "current" associated with the positron in analogy with the e.m cur-

rents used in the treatment of the interactions of photon with hadron (e.g. pion electromagnetic form factor) and is given by :

$$\eta(x) = \frac{\delta \varphi_x}{\delta \bar{e}^+} \tag{6}$$

The commutator term in (4) can then be computed using (2) and (6). The m_μ-term receives a contribution from the proton pole which is singular as $q_\mu \to 0$. It can be shown that $q_\mu m_\mu$ satisfies the dispersion relation with the absorptive part given by the unitarity. Later on, we shall take into account of this term i.e. the hard pion corrections.

Since Γ (k, q) also has a singular part as $q_\mu \to 0$ given by the nucleon-pole contribution, the regular part of Γ (k, q) can be found by subtracting the Born term from the l.h.s. and the r.h.s. of Eq.(4). This is the standard prescription [9] used in similar cases when the Born term is present as in Hyperon non-leptonic decays [7] . Thus in the soft pion limit $(q_\mu \to 0)$ the amplitude is well defined in the neighbourhood of $t = m_p^2$ and is given by :

$$\Gamma(k,q) = \Gamma(k,q)_{regular} + \Gamma(k,q)_{pole} \tag{7}$$

with

$$\Gamma(k,q)_{regular}\, u(p) = -\frac{i\sqrt{2}}{\delta\pi}\Big[\langle 0 | [Q_3^5, \eta(0)] | p\rangle + (q_\mu m_\mu + \frac{\delta\pi}{i\sqrt{2}}\Gamma(k,q)_{pole}\, u(p))\Big] + O(t-m_p^2) \tag{8}$$

The proton pole term and the commutator piece involve the virtual $e^+ - p$ transition matrix elements defined as :

$$\langle 0 | \eta(0) | p \rangle = (a + b\gamma_5) u(p) \tag{8a}$$

$$\langle 0 | [Q_3^5, \eta(0)] | p \rangle = (a' + b'\gamma_5) u(p) \tag{8b}$$

Using the Goldberger-Treiman relation for G_A/G_V, we then obtain in the neighborhood of $t = m_\rho^2$:

$$\Gamma(k, q) u(p) = [F(t) + \not{k}\, G(t)] u(p) \tag{9}$$

with

$$F(t) = -\frac{i\sqrt{2}}{g_\pi} \left[(a' + b'\gamma_5) + g_{App} (a\gamma_5 + b) \left(1 + \frac{2m_p^2}{t - m_\rho^2} \right) \right] \tag{10a}$$

$$G(t) = \frac{i\sqrt{2}}{g_\pi} (a\gamma_5 + b) \frac{2m_p\, g_{App}}{t - m_\rho^2} \tag{10b}$$

and g_{App} is the matrix element of the axial vector current (with the quantum number of the meson) between proton state.

G(t) contributes to the decay amplitude terms proportional to the lepton mass and thus can be neglected. By letting $t = m_e^2 \simeq 0$ in (10) we obtain the physical decay amplitude. This is the standard current Algebra result [10,11] of Tomozawa and Claudson et al. Because of strong interactions in the $I = \frac{1}{2}$ meson-nucleon system which give

rise to $I = \frac{1}{2}$ S-and P-wave resonances in the 1.4 - 1.7 GeV region[12] the extrapolation of (10) to $t = 0$ may be strongly affected by the presence of these resonances which now must be taken into account. Let us define for arbitrary t

$$\Gamma(k,q)u(p) = \left(A(t) + B(t)\gamma_5 + \not{k}\, G(t)\right)u(p)$$

where A(t) and B(t) satisfy dispersion relation in t variable with a cut starts from $t_0 = (m_\pi + m_p)^2$ to ∞ and satisfy the low energy theorem in Eq.(10). The final state theorem (i.e. time reversal invariance and unitarity) requires that, on the cut and below the inelastic threshold, A(t) and B(t) have, respectively, the phases of S- and P-wave πN phase shifts S_{11} and P_{11}. These phase shifts are small near t_0, but become large at higher energy. There are two S_{11} resonances at 1.55 and 1.65 GeV. The P_{11} resonance is at 1.7 GeV. They are all fairly inelastic and couple to both the πN and ηN channels. The general treatment of the integral equations for A(t) and B(t) is complicated[8]. It is simpler to assume the dominance of these resonances in the form factors A(t) and B(t). We shall simulate the effect of the two S_{11} resonances as a simple pole at m_a^2 and P_{11} resonance at m_b^2. We have :

$$A(t) = -\frac{i\sqrt{2}}{f_\pi}\left[\left(a' + g_{App}\, b\right)\left(1 + \frac{2m_p^2}{t-m_p^2} - \frac{2m_p^2}{m_a^2-m_p^2}\right)\right]\left(\frac{m_a^2-m_p^2}{m_a^2-t}\right)$$

$$B(t) = -\frac{i\sqrt{2}}{f_\pi}\left[\left(b' + g_{App}\, a\right)\left(1 + \frac{2m_p^2}{t-m_p^2} - \frac{2m_p^2}{m_b^2-m_p^2}\right)\right]\left(\frac{m_b^2-m_p^2}{m_b^2-t}\right) \quad (11)$$

where we have imposed the boundary conditions near $t = m_p^2$ ou $A(t)$ and $B(t)$ as given by Eq.(10a). Note that the above expression the current algebra result for $A(t)$ and $B(t)$ near $t = m_p^2$ and also generates terms of the order $O(t - m_p^2)$ as corrections to the soft pion amplitudes.

Setting $t = 0$ in Eq.(11), we obtain the following physical decay amplitudes for $p \to \pi^0 e^+$:

$$A(0) = -\frac{i\sqrt{2}}{f_\pi}\left[(a' - b\, g_{APP}) - (a' + b\, g_{APP})\frac{m_\rho^2}{m_a^2}\right] \qquad (13a)$$

$$B(0) = -\frac{i\sqrt{2}}{f_\pi}\left[(b' - a\, g_{APP}) - (b' + a\, g_{APP})\frac{m_\rho^2}{m_b^2}\right] \qquad (13b)$$

The 2nd terms on the r.h.s. of Eqs.(13) are corrections to current algebra amplitudes due to π N resonances and can be substantial $\left(\frac{m_\rho^2}{m_a^2} \simeq 0.4\right)$ depending on the ratio $(a' + bg_{App})/(a' - bg_{App})$ etc... This is in contrast with Hyperon non leptonic decay amplitudes where corrections to soft pion result are of the order $O\left(\frac{m_\Sigma^2 - m_\rho^2}{m_a^2}\right)$ and are relatively less important. Note that since the ratio $(a' + bg_{App})/(a' - bg_{App})$ is independent of the detailed form of the spatial 3-quark wave function these corrections are largely model-independent as will be clear below.

2 - *Calculation of Low Energy Parameters*

To evaluate $A(o)$ and $B(o)$ we need to compute (a, b) and (a', b') defined in Eqs.(8). Using (2) and (6), we have [10]

$$\left[(a+b\gamma_5)U(p)\right]_\alpha = \frac{4G\lambda}{\sqrt{2}}\,\varepsilon_{ijk}\,\langle 0|:U_{k\beta}(0)\,d_{i\delta}(0)\,U_{j\gamma}(0):|p\rangle \times \left[C^{-1}\gamma_\mu\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\right]_{\beta\gamma}\left[\gamma_\mu\left(\frac{3+\gamma_5}{2}\right)\right]_{\alpha\delta} \tag{14a}$$

$$\left[(a'+b'\gamma_5)U(p)\right]_\alpha = \frac{4G\lambda}{\sqrt{2}}\,\langle 0|:U_{k\beta}(0)\,d_{i\delta}(0)\,U_{j\gamma}(0):|p\rangle \times \frac{1}{2}\left[C^{-1}\gamma_\mu\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\right]_{\beta\gamma}\left[\gamma_\mu\left(\frac{1+3\gamma_5}{2}\right)\right]_{\alpha\delta} \tag{14b}$$

Thus (a, b) and (a', b') are given in terms of the long-distance matrix element of the 3-quark local operator $\langle 0|:udu:|p\rangle$ which can be obtained from the Wilson's short distance expansion of the 3-quark Bethe-Salpeter baryon wave function. Assuming spin - unitary - spin independent inter quark forces, the Bethe-Salpeter 3-quark wave function for the baryon octet can be factorised into a spin - unitary - spin and a spatial parts. We have [10] :

$$\psi^{abc}_{ijk}(x_1,x_2,x_3) = \langle 0|T\left(\psi^a_{i\alpha}(x_1)\,\psi^b_{j\beta}(x_2)\,\psi^c_{k\gamma}(x_3)\right)|B\rangle = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}\left(\chi^{(s)}_{\alpha\beta\gamma}\,U^{(s)}_{abc} + \chi^{(a)}_{\alpha\beta\gamma}\,U^{(a)}_{abc}\right)\varphi(\xi,\eta,P)\exp(ip\cdot x) \tag{15}$$

where $\varphi(\xi,\eta,P)$ is the spatial wave function and X, ξ, η are respectively the center of mass and relative coordinates defined in the usual way for a 3-body system of equal masses as :

$$X = x_1+x_2+x_3\,,\quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_2)\,,\quad \eta = \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1+x_2-2x_3)$$

In the non relativistic quark model, $\vec{\xi}$ and $\vec{\eta}$ are respectively denoted by $\vec{\rho}$ and $\vec{\lambda}$ which we shall use in all expressions involved the nonrelativistic Schrödinger wave function.

The spin wave functions are given by :

$$\chi^{(\xi)}_{\alpha\beta\gamma} = \left[\frac{(\not{p} + m_p)\gamma_5 C}{2m_p} \right]_{\alpha\beta} u_\gamma(p), \quad \chi^{(\eta)}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\chi^{(\xi)}_{\beta\gamma\alpha} - \chi^{(\xi)}_{\gamma\alpha\beta} \right) \tag{16}$$

and similarly, the unitary spin wave function for the baryon octet are given by :

$$U^{(\xi)}_{abc} = \varepsilon_{abc} B^d_c, \quad U^{(\eta)}_{abc} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(U^{(\xi)}_{bca} - U^{(\xi)}_{cab} \right) \tag{17}$$

(a, b, c are SU(3) flavor index and B^d_c is the usual baryon octet matrix).

On the other hand, assuming that $\psi^{abc}_{ijk}(x_1, x_2, x_3)$ are regular at the origin, the short distance Wilson's expansion for the T-product of 3-quark field operator gives :

$$\langle 0 | T(\psi(x_1)\psi(x_2)\psi(x_3) | p\rangle \simeq_{x_1, x_2, x_3 \to 0} \langle 0 | : \psi(0)\psi(0)\psi(0) : | p\rangle \tag{18}$$

apart from c-number coefficient functions with logarithms due to short-distance QCD interactions.

The long-distance matrix element $\langle 0 | : uud : | p\rangle$ is given by the average of the 3-quark momentum distribution and is dominated by the low-momentum component of the wave function.

Thus :

$$\langle 0|:uud:|p\rangle = \int \frac{d^4p_\xi\, d^4p_\eta}{(2\pi)^8}\, \tilde{\Psi}(p_\xi, p_\eta; p) \tag{19}$$

where $\tilde{\Psi}(p_\xi, p_\eta; p)$ is the Bethe-Salpeter wave function in momentum space. Let $\phi(\vec{\xi}, \vec{\eta}; p)$ be the 3-dimensional Schrödinger wave function. In momentum space we have :

$$\tilde{\phi}(\vec{p}_\xi, \vec{p}_\eta, p) = \int \frac{dp_{\xi 0}\, dp_{\eta 0}}{(2\pi)^2}\, \tilde{\Psi}(p_\xi, p_\eta; p)$$

Hence

$$\psi(0,0,p) = \int \frac{d\vec{p}_\xi\, d\vec{p}_\eta}{(2\pi)^6}\, \tilde{\phi}(\vec{p}'_\xi, \vec{p}'_\eta; p) = \phi(0,0;p) \tag{20}$$

and $\psi(0,0;p)$ can now be given simply by the 3-dimensional Schrödinger wave function $\phi(0,0;p)$ which we shall compute using the non relativistic wave function of a 3-quark system bound by the harmonic oscillator potential which seems to be quite successful in describing low-lying baryon excited states [13] . The spatial part of the proton wave function is then

$$\psi_{00}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) = \left(\frac{\alpha_\rho}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2} \left(\frac{\alpha_\lambda}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\alpha_\rho^2 \vec{\rho}^{\,2} + \alpha_\lambda^2 \vec{\lambda}^{\,2}\right)\right] \tag{21}$$

where

$$\alpha_\rho^2 = \alpha_\lambda^2 = m_q \omega$$

m_q is the constituent quark mass ($m_q \simeq \frac{1}{3} m_p$) and ω is the oscillator level spacing. From the spectra of baryon first excited states, we obtain

$$\omega = 520 \text{ MeV}$$

The normalisation of the proton wave function then gives :

$$\varphi(0,0;P) = (3)^{-3/4} \psi(0,0) = \left(\frac{m_q \omega}{\sqrt{3}\pi}\right)^{3/2} \tag{22}$$

Using (14) - (16), after some algebra, we get :

$$\begin{aligned} (a + b\gamma_5) U(P) &= -K (1 + 3\gamma_5) U(P) \\ (a' + b'\gamma_5) U(P) &= -K \left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{\gamma_5}{2}\right) U(P) \end{aligned} \tag{23}$$

where

$$K = 12\lambda \left(\frac{G m_p^2}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{\omega}{3\sqrt{3}\pi m_p}\right)^{3/2} m_p \tag{24}$$

3 - *Final Results for Decay into a Pseudoscolar and Lepton*

With K given, we finally obtain the $p \to \pi^0 e^+$ decay amplitude as

$$\begin{aligned} A(0) &= \frac{3}{2} g \left[(1 + D + F) - (1 - D - F) \frac{m_p^2}{m_a^2} \right] \\ B(0) &= \frac{1}{2} g \left[(1 + D + F) - (1 - D - F) \frac{m_p^2}{m_b^2} \right] \end{aligned} \tag{25}$$

with

$$g = \frac{\sqrt{2}\,K}{g_{\pi}} \tag{26}$$

and

$$D + F = |G_A/G_V| = 1.25 \pm 0.01$$

$$D = 0.44 \;, \quad F = 0.81$$

according to a most recent data [14].

The 2nd terms in (25) are corrections to Current Algebra result due to resonance effects and their relative importance is determined by the ratio

$$\rho = \frac{a' + b\, g_{APP}}{a' - b\, g_{APP}} \tag{27}$$

which is quite small for the $P \to \pi^0 e^+$ amplitude. ($\rho = 0.11$) This correction increases the amplitude by 4 % relative to the soft pion result.

Other two-body decay modes involving π^+, K, η can be obtained in the same manner using standard PCAC assumption. Neglecting all SU(3) symmetry breaking effects, we have :

$P \to \pi^+ \bar{\nu}_e$

$$A(0) = -\frac{g}{\sqrt{2}}\left[(1+D+F) - (1-D-F)\frac{m_\rho^2}{m_{a^1}^2}\right] \tag{28}$$

$$B(0) = \frac{g}{\sqrt{2}}\left[(1+D+F) - (1-D-F)\frac{m_\rho^2}{m_{b^1}^2}\right]$$

$$p \to K^0 \mu^+$$

$$A(0) = -\sqrt{2}\, g_8 \left[(1 + D - F) - (1 + F - D) \frac{m_p^2}{m_a^2} \right] ; \quad B = 0 \tag{29}$$

$$p \to K^+ \bar{\nu}_\mu$$

$$A = -\frac{g_8}{3\sqrt{2}} D \left(1 + \frac{m_p^2}{m_a^2} \right) ; \quad B = A \tag{30}$$

$$p \to \eta e^+$$

$$A(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2} g_8 \left[(1 + D - 3F) - (1 + 3F - D) \frac{m_p^2}{m_a^2} \right]$$

$$B(0) = -\frac{1}{2\sqrt{3}} g_8 \left[(1 + D - 3F) - (1 + 3F - D) \frac{m_p^2}{m_b^2} \right] \tag{31}$$

The Current Algebra results given by the 1st terms agree with previous calculations [10,11].

Note an important correction to soft pion result for the $p \to \eta e^+$ decay because of the large value of ρ . This produces a very large suppression of the amplitude relative to the soft pion value by a factor of 10. For other decay modes, corrections to soft pion amplitudes are less important. We find an increase of the $K^+ \bar{\nu}_\mu$ amplitude by 40 % and a suppression of the $K^0 \mu^+$ amplitude by 15 %. These corrections have no appreciable effects on the total two-body decay rates which are dominated by the $p \to \pi^0 e^+$ and $p \to \pi^+ \bar{\nu}_e$ modes. Using (28) - (31), we obtain the following relative two-body decay rates, calculated with $m_a = m_b = 1.6$ GeV :

$$\Gamma(p \to \pi^+ \bar{\nu}_e) = 0.40\ \Gamma(p \to \pi^0 e^+)$$
$$\Gamma(p \to \eta\, e^+) = 2.4 \times 10^{-1}\ \Gamma(p \to \pi^0 e^+) \qquad (32)$$
$$\Gamma(p \to K^0 \mu^+) = 0.14\ \Gamma(p \to \pi^0 e^+)$$
$$\Gamma(p \to K^+ \bar{\nu}_\mu) = 0.56 \times 10^{-2}\ \Gamma(p \to \pi^0 e^+)$$

independent of the spatial part of the nonrelativistic 3-quark wave function at the origin as well as the masses of the superheavy gauge bosons M_X. Our relative rates seem to agree qualitatively with the values given by Kane and Karl using the relativistic quark fusion model [6] though it is not clear to what extent one may trust their result since chiral symmetry properties and PCAC constraints have not been incorporated in the quark fusion model. Thus in a simple manner we have been able to extrapolate the soft pion amplitude ($t = m_p^2$) to the physical decay amplitude ($t = 0$) using the standard resonance parametrisation of the amplitude considered as a function of t. This is a large improvement over the Current Algebra result of Tomozawa and of Claudson et al. To the extent that this resonance parametrisation is valid, our relative decay rates given in Eq.(32) are essentially model independent.

III - Decay into Vector Meson and Lepton

In the same spirit we can similarly carry out a calculation for the two-body decay rates $p \to \omega e^+$ and $p \to \rho^0 e^+$ making use of the divergence condition for the vector currents associated with the ω and ρ^0 in the presence of the GUT interactions.

Consider the $p - e^+$ matrix element of the isovector vector current $V_\mu^{\rho^0} = \frac{1}{2}(\bar{u}\gamma_\mu u - \bar{d}\gamma_\mu d)$ defined as :

$$\langle e^+ | V_\mu^{\rho^0}(0) | p \rangle = \bar{v}_{e^+}(k)\left[\gamma_\mu (g_V(q^2) + \gamma_5 g_A(q^2) + q_\mu \text{ and } \sigma_{\mu\nu} q_\nu \text{ terms}\right] u(p) \tag{33}$$

$g_V(q^2)$ and $g_A(q^2)$ are the form factors defined with the positron e^+ on the mass shell ($t = m_e^2$). In the presence of baryon number-violating interactions, we have :

$$\partial_\mu V_\mu^{\rho^0} = [Q_3, \mathcal{Q}_X] = -\frac{1}{2}\mathcal{Q}_X \tag{34}$$

We then obtain at $q^2 = 0$:

$$(m_p - m_e) g_V(0) + (m_p + m_e)\gamma_5 g_A(0) = -\frac{1}{2}\langle e^+ | \mathcal{Q}_X(0) | p \rangle \tag{35}$$

Using vector meson dominance approximation, we have :

$$g_V + g_A\gamma_5 = -\frac{1}{2}\frac{(a + b\gamma_5)}{m_p}\left(\frac{m_\rho^2}{f_\rho}\right) \tag{36}$$

where $\langle e^+ | \mathcal{Q}_X(0) | p \rangle$ has been identified with $\langle 0 | \eta(0) | p \rangle$ given in Eq.(8a). The same result can also be obtained by the proton-pole Born term similar to the Born term of the $p \to \pi^0 e^+$ amplitude. The $p \to \rho^0 e^+$ decay amplitude is defined as :

$$\mathcal{M}(p \to \rho^0 e^+) = \bar{v}_{e^+}(k) \not{\epsilon} (g_V + g_A\gamma_5) u(p) \tag{37}$$

Similarly, by considering the divergence condition for the isoscalar vector current associated with ω . ($V_\mu^\omega = \frac{1}{2}(\bar{u}\gamma_\mu u + \bar{d}\gamma_\mu d)$) we have :

$$\partial_\mu V_\mu^\omega = -\frac{3}{2} q_x$$

from which

$$g_V^\omega + g_A^\omega \gamma_5 = -\left(\frac{3}{2}\right) \frac{(a+b\gamma_5)}{m_p} \left(\frac{m_\rho^2}{g_\rho}\right) \tag{38}$$

which shows that the $p \to \omega e^+$ amplitude is larger than that of $p \to \rho^0 e^+$ by a factor of 3 which comes from quark counting. This relation has been obtained previously in the quark fusion model[5] . In the same manner, we have for the $p \to \rho^+ \bar{\nu}_e$ amplitude :

$$g_V^{\rho^+} + g_A^{\rho^+} \gamma_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(a+b\gamma_5)}{m_p} \left(\frac{m_\rho^2}{g_\rho}\right) \tag{39}$$

The decay rates into a vector meson and a lepton are given in terms of g_V , g_A as :

$$\Gamma(p \to \rho^0 e^+) = \frac{1}{16\pi} \left(1 - \frac{m_\rho^2}{m_p^2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{m_p^2 - m_\rho^2}{m_\rho^2}\right) (g_V^2 + g_A^2) m_p \tag{40}$$

which gives (using $g_{\rho\pi\pi}^2 / 4\pi = 2.86$) :

$$\begin{aligned} \Gamma(p \to \omega e^+) &= 0.23\ \Gamma(p \to \pi^0 e^+) \\ \Gamma(p \to \rho^0 e^+) &= \frac{1}{9}\ \Gamma(p \to \omega e^+) \\ \Gamma(p \to \rho^+ \bar{\nu}_e) &= \frac{2}{5}\ \Gamma(p \to \rho^0 e^+) \end{aligned} \tag{41}$$

In obtaining the above decay rates, we have ignored the magnetic coupling terms which are expected to give a small rates relative to the g_V, g_A-terms due to phase space suppression.

IV - Total Rates and Conclusion -

So far, we have considered only two-body decay modes. 3-body decay modes with the two-pion in the continuum may also be a sizeable fraction of the total decay rates. Most of these decay rates comes from the processes $p \to \pi\pi e^+$, $p \to \pi K \mu^+$ etc. which can be obtained from the processes $p \to \pi^0 e^+$, $p \to K^0 \mu^+$ etc. using Current Algebra Technique as given by Blankenbecler and Wise [15] and also [11] by Claudson et al. Corrections to soft pion amplitude due to $\pi\pi$ final state interactions seem to be important [15] and increase the rate by 50 %. In this way, they found that

$$\Gamma(p \to \pi\pi e^+) \simeq 0.25\, \Gamma(p \to \pi^0 e^+) \tag{42}$$

Together with other less important decay modes, this leads to :

$$\begin{aligned} &B.R\ (p \to \pi^0 e^+) \simeq 0.4 \\ &B.R\ (p \to K^0 \mu^+) \simeq 0.06 \\ &B\,R\ (p \to \omega e^+) \simeq 0.1 \end{aligned} \tag{43}$$

which tells us that the $p \to \pi^0 e^+$ decay is the most important one. This confirms the quark fusion model prediction.

To obtain the total decay rate, we thus need only to compute the $p \to \pi^0 e^+$ decay rate given by :

$$\Gamma(p \to \pi^0 e^+) = \left(\frac{5}{16\pi}\right)(1+D+F)^2 \left(\frac{\alpha^2}{\beta_\pi^2}\right) m_p \qquad (44)$$

Using $\alpha_G^2(M_X)/4\pi$ and a typical $M_X = 4 \times 10^{14}$ GeV, we get :

$$\Gamma(p \to \pi^0 e^+) = 3.92 \times 10^{-30} (y_{2S})^{-1} \qquad (44')$$

which is faster than Tomozawa's rate by a factor of 3. The above partial rate leads to a proton life time

$$\tau(p) = 1.02 \times 10^{29} y_{2S}$$

which is already excluded by present lower experimental limit. However an increase of the QCD parameter $\Lambda_{\overline{MS}}$ can also increase the lifetime by a large factor $(\tau(p) \propto (\Lambda_{\overline{MS}})^4)$ and present uncertainties in the determination of $\Lambda_{\overline{MS}}$ and quark model parameters prevent us from saying anything about the validity of SU(5) Grand Unified Theories. Probably a value of $\Lambda_{\overline{MS}}$ of the order 400 MeV would be sufficient to increase the proton lifetime to within experimental limit.

REFERENCES and FOOTNOTES.

[1] H. GEORGI and S. GLASHOW, Phys. Rev. Lett. 32, 438 (1974) ; A. BURAS, J. ELLIS, M.K. GAILLARD and D.V. NANOPOULOS, Nucl. Phys. B 135, 66 (1978).
H. GEORGI and D.V. NANOPOULOS, Nucl. Phys. B155, 52, (1979).

[2] A. BURAS et al., quoted in Ref. 1.

[3] A. LE YAOUANC, L. OLIVER, O. PENE and J.C. RAYNAL, Phys. Lett. 72B, 53 (1977).

[4] I. ANTONIADIS, C. KOUNAS and C. ROIESNEL, Nucl. Phys., B198, 317 (1982) and References to previous works cited there in. See also P. LANGACKER, Phys. Rep. 72, 187 (1981).

[5] M.B. GAVELA et al., Phys. Rev. D 23, 1580 (1981).

[6] G. KANE and G. KARL, Phys. Rev. D 22, 2808 (1980).

[7] For a Review on Current Algebra Technique, see R.E. MARSHAK, RIAZUDDIN and C.P. RYAN, *Theory of Weak Interactions in Particle Physics*, Wiley and sons, New York NY (1969).

[8] G.R. FARRAR, Phys. Rev. D 4, 212 (1971) ; T.N. PHAM and TRAN N. TRUONG, Phys. Rev. D 16, 896 (1977).

[9] This prescription is given in Ref. 7, p. 580 with References to original papers cited therein.

[10] Y. TOMOZAWA, Phys. Rev. Lett., 46, 463 (1981)

[11] M. CLAUDSON, M.B. WISE and L.J. HALL, Nucl. Phys. B 195, 297 (1981).

[12] For a Review on Baryon Resonances, see L. MONTANET, in *Proceedings of the XX International Conference on High Energy Physics*, Madison, 1980. Ed. by L. DURAND and L.G. PONDROM, AIP, New York (1981)

[13] We use the nonrelativistic wave function given by GAVELA et al. in Ref. 5.

[14] R.E. SHROCK and L.L. WANG, Phys. Rev. Lett. 41, 692 (1978).

[15] M.B. WISE, R. BLANKENBECLER and L. ABBOTT, Phys. Rev. D 23, 1591 (1981).

APPENDICE A : THEORIES DE JAUGE

Dans cet appendice, nous donnons le formalisme des théories de jauge non brisées comme QCD, ainsi que le cas des théories à symétrie de jauge spontanément brisée. Comme nous l'avons déjà singalé les théories de jauges permettent d'unifier les interactions fondamentales

1) Théorie de Jauge

Soit un groupe compact G (SU(N) dans les cas courants) et nous imposons au lagrangien d'être invariant sous la transformation locale associée à G; par exemple si Ψ représente des fermions appartenant à une représentation du Groupe G, nous imposons la symétrie.

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = e^{i\alpha_a(x) T^a} \Psi(x)$$

T^a sont les éléments de l'algèbre de Lie dans la représentation considéré. Les transformations de jauge $g(X) \in G$ en deux points différents sont reliés par une connexion, le champ de jauge $A^a_\nu(X)$ qui se transforme comme la représentation adjointe du groupe G.
A_μ défini un déplacement parallèle, en langage de Géométrie différentielle : Associons à A_μ un élément de G

$$g(x+dx, x, A) = e + dx^\nu A_\nu(x)$$

Alors un déplacement parallèle est défini par :

$$\phi_+(x) = \phi^{g(x, x+dx)}(x) = \phi(x) + dx \cdot A(x) \phi(x)$$

$$A_\nu = A^a_\mu T^a$$

Il est alors possible de définir une dérivée covariante D_μ.

$$\delta x^\mu D_\mu \phi(x) = \phi(x+\delta x) - \phi_r(x) = \delta x^\mu (\partial_\mu - A_\mu(x)) \phi(x)$$

Soit

$$D_\mu{}^i{}_j = \partial_\mu \delta^i{}_j - (T^a)^i{}_j A^a_\mu(x)$$

La loi de Transformation de A_μ est alors donnée en imposant, dans une transformation infinitésimale $e + T^a \delta\alpha_a$

$$\delta D_\mu \phi(x) = \delta\alpha\, D_\mu \phi$$

$$\delta\alpha = \delta\alpha_a T^a$$

Soit $$\delta A_{\mu a}(x) = \partial_\mu \delta\alpha_a(x) + C^{bc}_a \delta\alpha_b(x) A_{\mu c}(x)$$

Il est encore possible de définir une courbure $F_{\mu\nu}(x)$:

$$F_{\mu\nu}(x) = (\partial_\mu A_{\nu a} - \partial_\nu A_{\mu a} - C^{bc}_a A_{\mu b} A_{\mu c}) t^a$$

$$= -[D_\mu, D_\nu]$$

C^{bc}_a sont les constantes de structure du Groupe $[T^a, T^b] = C^{ab}_c T^c$.
Il est alors possible de donner un lagrangien invariant de jauge

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i \bar\Psi \not\partial \Psi - m \bar\Psi \Psi$$

Ψ représente des fermions classés dans une certaine représentation du Groupe. Il faut alors quantifier la théorie; le formalisme le mieux adapté est le formalisme fonctionel. Il faut prendre garde à la dégénéresence des trajectoires dans l'espace des phases, due au fait que des solutions transformée de jauge sont équivalentes. La résolution de ce problème se fait par l'introduction de particules non physiques (fantômes) couplées (dans le cas non-abélien) au champs de jauge; le Lagrangien s'écrit alors

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial A_a)^2 + \partial_\mu \bar\eta_a (D^\mu \eta)_a + i \bar\Psi \not\partial \Psi - m \bar\Psi \Psi$$

η sont les fantomes de Fadeev et Popov (scalaires anticommutants) et λ est le paramètre "qui fixe la jauge"; les résultats physiques doivent être indépendants de λ .

Le fait remarquable de ces théories est qu'elles sont renormalisables et que la renormalisabilité préserve l'invariance de jauge. Donnons deux exemples $G = U(1)$: le nombre quantique associé est la charge électrique; il n'y a qu'un boson de jauge, de masse nulle, le photon. L'autre exemple "physique" est $G = SU(3)$. Les fermions sont rangés dans la représentation fondamentale $n=3$; les 3 nombres quantiques associés sont les couleurs, les huit bosons de jauge, les gluons.

Cependant la théorie décrite ci-dessus ne peut convenir dans le cas où les médiateurs de la force (bosons de jauge) sont massifs comme par exemple dans l'interaction faible, car un terme de masse $m A_\mu A^\mu$ briserait l'invariance de jauge. C'est pourquoi, il convient d'étudier le mécanisme de Higgs.

2) Théorie de jauge spontanément brisée

Considérons des champs scalaires ϕ_i de G. Il est possible de coupler ces champs aux champs de jauge, en ajoutant au lagrangien un terme

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^+ (\partial_\mu \phi) - V(\phi)$$

où $V(\phi)$ est un potentiel bilinaire et quadratique en ϕ (renormalisable) et invariant de jauge.

Considérons ϕ comme un champ classique et cherchons le minimum de $V(\phi)$; λ_i

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \phi}\right|_{\phi=\lambda} = 0$$

si $\lambda \neq 0$ la symétrie est spontanément brisée c'est à dire que le vide n'est pas annihilé par la charge associée à la symétrie. Il convient alors de quantifier le théorie autour de la valeur λ :

$\phi = \lambda + \rho$ et $\langle 0|\rho|0\rangle = 0$ dans le vide de la physique.

Dans le cas général, à chaque générateur du sous groupe de G qui a été brisé, correspond un boson de Goldstone.
Dans le cas d'une théorie de jauge, ces bosons de Goldstone se couplent aux bosons de jauge, leur générant de ce fait une masse. Aux champs est associée la matrice de masse $M^2_{ab} = g^2 (T^a \lambda)^+ (T^b \lambda)$.
Remarquons que les bosons associés au sous groupe H de G non brisé (laissant invariant λ , i.e. : $T^a \lambda = 0$) sont de masse nulle. Les champs de Higgs acquièrent une masse :

$$M_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}\Big|_\lambda$$

Si de plus, les fermions sont couplés aux Higgs par un couplage de Yukawa du type $\bar{\psi} \psi \phi$, ils acquièrent également une masse.
Le fait le plus remarquable de ce modèle est que la symétrie restant exacte au niveau du Lagrangien, la théorie est renormalisable et les contre termes sont ceux de la théorie symétrique.
Afin d'étudier l'unitarité et la renormalisabilité, il est intéressant d'introduire la jauge de t'Hooft :

$$F_a = \partial_\nu A^\nu_a - \frac{g}{\varphi} (\chi_i, T^a \rho)$$

(dans le lagrangien terme $-\frac{\varphi^2}{2} F_a F^a$)
Ce terme permet d'éliminer les pôles en zéro dus aux bosons de Goldstone et aux Fadeev, en leur donnant une masse). D'autre part, le terme quadratique du lagrangien est diagonal ce qui permet de donner les propagateurs.
Pour les bosons de jauge

$$\Delta^{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 - M^2 + i\varepsilon} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \varphi^{-1}) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \varphi^{-1} M^2 + i\varepsilon} \right)$$

Pour conclure cette revue rapide donnons l'exemple du cas de Weinberg-Salam.
Les interactions faibles peuvent être décrites en introduisant un isospin faible T appartenant au groupe SU(2).
On introduit une hypercharge faible Y afin de généraliser la relation de Gell-Mann

$$Q = \frac{Y}{2} + T_3$$

à Y est associée une symétrie $U_y(1)$.
La théorie de Weinberg-Salam est alors basée sur le groupe de jauge
$G = SU(2) \times U_y(1)$.
Considérons le cas où les seuls fermions sont e^-, ν_e . Introduisons dans les représentations irréductibles :

$$L_e = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix} \qquad e_R, \quad T = 0 \quad Y = -2$$

$$T = 1/2 \quad Y = -1$$

Le lagrangien s'écrit alors :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{(1)}_{\mu\nu} F^{(1)\mu\nu} - \frac{1}{4} F^{(2)}_{\mu\nu} F^{(2)\mu\nu} + \bar{e}_R (i\not\partial - g'\not B) e + \bar{L}_e i\not\partial L_e$$

B_μ est le champ de jauge associé à $U_y(1)$
$F^{(1),(2)}_{\mu\nu}$ sont les tenseurs de courbures associées aux groupes SU(2) et U(1)

$$i\not\partial = \left(i\not\partial - \frac{g'}{2}\not B + g\frac{\tau^i}{2}\not A_i \right)$$

A^i_μ sont les champs de jauge associés à SU(2). Pour briser la symétrie, on introduit le doublet de Higgs

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi_0 \end{pmatrix} \qquad \langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

les symétries SU(2) et $U_y(1)$ sont brisées mais la symétrie $U_Q(1)$ est conservée.
On ajoute alors au lagrangien un terme

$$\mathcal{L}' = (D_\mu \phi)^+ (D_\mu \phi) - V(\phi^+ \phi) - G\left(\bar{L} e_R \phi + \phi^+ \bar{e}_R L\right)$$

où $V(\phi^+, \phi)$ est un potentiel quadratique brisant la symétrie.

Ecrivons $\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \frac{v + P(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ et travaillant en jauge unitaire (i.e. dans une jauge où $\phi' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v + P(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

on obtient pour la partie d'interaction leptons-champ de jauge :

$$\mathcal{L}^{int} = \frac{g}{2\sqrt{2}} \left(\bar{\nu}_e \gamma^\mu (1-\gamma_5) e \, W_\mu^+ + h.c \right) - \frac{e}{2} \left[tg\theta_W \left(2 \bar{e}_R \gamma^\mu e_R \right.\right.$$

$$\left.\left. + \bar{\nu}_e \gamma^\mu \nu_e + \bar{e}_L \gamma^\mu e_L - \cot g \theta_W \left(\bar{e}_L \gamma^\mu e_L - \bar{\nu}_e \gamma^\mu \nu_e \right) \right] Z_\mu \right.$$

$$- e A_\mu \bar{e} \gamma^\mu e$$

avec $W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(A_\mu^1 \pm i A_\mu^2 \right)$ $\qquad M_W = \frac{v g}{2}$

$$Z_\mu = \left(g^2 + g'^2 \right)^{-1/2} \left(- g A_\mu^3 + g' B_\mu \right)$$

$$A_\mu = \left(g^2 + g'^2 \right)^{-1/2} \left(g B_\mu + g' A_\mu^3 \right) \quad (photon)$$

$$M_Z = \frac{v}{2} \left(g^2 + g'^2 \right)^{1/2}$$

$$M_A = 0$$

$$tg\theta_W = \frac{g'}{g} \qquad e = g' \cos\theta_W = \frac{g g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

$$M_e = \frac{v G_e}{\sqrt{2}}$$

APPENDICE B

L'intégrale du Chapitre III (5) s'écrit :

$$\frac{1}{i\,16\pi^2}\sum_{i,j}\bar{d}(p_2)\gamma_\mu\left[I(i,j)\,f_2 - A(i,j)\,q_1 - B_1(i,j)\,q_1 - B_2(i,j)\,f_2\right]m_j^2$$

$$\times\,\lambda_i\lambda_j\,R\,S(q_1)\times\bar{d}(q_2)\gamma^\mu L\,S(q_1)\,\frac{1}{M_H^2\,M_W^2} \qquad (1)$$

où l'on a posé

$$\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{(1,k)}{D_{ij}} = \left\{I(i,j),-A(i,j)\,q - B_1(i,j)\,q_1 - B_2(i,j)\,f_2\right\}\frac{1}{i\,16\pi^2 M_H^2 M_W^2}$$

utilisant la formulede Feynman $\frac{1}{a_1^p a_2^q} = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_0^1\frac{dx\,x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{[a_1x + a_2(1-x)]^{p+q}}$

il est possible de calculer les coefficients I, A, B_2, B_2.

Plusieurs cas se présentent :

1) i = j posons $x = \frac{m_i^2}{M_H^2} = \frac{m_j^2}{M_H^2}$ on obtient :

$$I(i,j) = -\frac{1}{(1-x)} - \frac{1}{(1-x)^2}\log x$$

$$A(i,j) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x}{(1-x)^2}\log x + \frac{x^2}{(1-x)^3}\log x \qquad (3)$$

$$B_1(i,j) = -\frac{3}{4(1-x)} - \frac{x}{2(1-x)^2} + \frac{1}{2(1-x)^3}\log 1/x. = B_2(i,j)$$

2) i ≠ j mais $m_i \ll m_j$

Dans ce cas, posons $x = \frac{m_j^2}{M_H^2}$

$$A(i,j) = \frac{1}{2x}\,\mathrm{Log}\,x + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x(1-x)}\log 1/x - \frac{1}{2x(1-x)^2}\log 1/x.$$

$$I(i,j) = -\frac{1}{1-x}\,\mathrm{Log}\,x \qquad (4)$$

$$B_1(i,j) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x(1-x)} - \frac{1}{2x^2}\,\frac{\log x}{(1-x)^2} + \frac{1}{x^2}\,\frac{\log x}{1-x} - \frac{1}{2x^2}\log x$$

$$B_2(i,j) = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2x^2}\frac{\log x}{(1-x)^2} - \frac{1}{x^2}\frac{\log x}{1-x} + \frac{1}{2x^2}\log x$$

$$-\frac{1}{2x}\frac{\log x}{(1-x)^2} + \frac{1}{2x}\log x$$

Dans le cas de 2 générations, on ne retient que les termes en m_c^2, soit les coefficients $I' = I(c,c) - I(u,c)$ (de même on défini A', B') .
On obtient avec $x = \frac{m_c^2}{M_H^2}$

$$I' = -\frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2}\log x$$

$$A' = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x(1+x)}{2(1-x)^3}\log x \qquad (5)$$

$$-B_1' = \frac{1}{4}\frac{1}{1-x} + \frac{x}{2(1-x)^2} + \frac{x}{2(1-x)^3}\log x$$

$$B_2' = -\frac{3}{4}\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x^2-2x}{2(1-x)^3}\log x$$

On peut arranger dans (1), le coefficient dépendant des impulsions sous la forme

$$A' \not{p}_1 - B_1' \not{q}_1 + (I' - A' - B_2')\not{p}_2$$

Or $I' - A' - B' = B_1'$.

Posant $g(x) = A'$, $-\frac{1}{4}h(x) = B_1'$ on retrouve l'expression 6 du Chap. III

Dans le cas de 3 générations, les calculs sont plus complexes; les intégrales intervenant sont :

$$\lambda_c^2 m_c^2 (I(c,c) - I(u,c)) + \lambda_c\lambda_t m_c^2 (I(t,c) - I(u,c)) + m_t^2\lambda_t^2 (I(t,t) - I(u,t)) + m_t^2 \lambda_c\lambda_t (I(c,t) - I(u,t)) \qquad (6)$$

Le calcul se fait dans la limite $m_u^2, m_c^2 \ll M_H^2$.
Dans (6) I symbolise les contributions de I,A, B_1, B_2.
Les coefficients de λ_c^2, $m_t^2\lambda_t^2$ sont déjà calculés par (5) celui de $\lambda_c\lambda_t m_t^2$ est nul dans la limite $m_u = m_c \to 0$
Celui de $\lambda_c\lambda_t m_c^2$ est I(t,c) avec $m_c \ll$, donnés par (4).

Combinant ces différents résultats, on obtient la formule (9) du chapitre III.

APPENDICE C : CALCUL DES DIMENSIONS ANORMALES

Nous nous plaçons dans le schéma de soustraction minimale : les fonctions de Green sont régularisées par la méthode dimensionnelle; la renormalisation constituant à éliminer les pôles en ε, $\varepsilon = d - 4$
Les fonctions de Green ainsi définie ne sont pas reliées directement à des quantités physiques. En dimension d la constante de couplage g, à la dimension $[g] = \varepsilon/2$; on écrira donc $g = g_0 \mu^{\varepsilon/2}$, μ étant une échelle de masse arbitraire. (Dans le texte le μ des équations du groupe de renormalisation est une échelle de masse arbitraire : soit un point de renormalisation, soit celui qui vient d'être défini. La théorie nue est définie par des constantes nues g_0, m_0 et des champs ψ_0 (fermions, gluons). On définit des constantes et champs renormalisés par des relations du type

$$\psi_0 = \sqrt{Z_\psi}\,\psi \qquad g = Z_g\, g_0$$

où les Z sont fonctions de ε et g, et μ
Les fonctions de Green régularisées dépendent donc de g_0,
les fonctions renormalisées dépendant de g,m.
Soit $\Gamma^{(n)}_{O_i}$ les fonctions 1.P.I avec insertion de O_i et à n pattes; les Z_{ij} sonr définis par :

$$\Gamma^{(n)}_{O_i}(\psi(x_1) - \psi(x_n)) = Z_\psi^{n/2}\, Z_{ij}\, \Gamma^{0\,(n)}_{O_j}(\psi(x_1) - \psi(x_n))(g_0, m_0, \mu, \varepsilon) \quad (1)$$

La dimension anormale sera

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{Z_{ik}}\left(\mu \frac{\partial Z_{kj}}{\partial \mu}\right)_{g_0} \quad (2)$$

Dans le schéma de soustraction choisi, on ne soustrait que les pôles, Z_i

s'écrit alors

$$Z_{ij} = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{(z_{ij}^{(1)})^n}{\varepsilon^n}$$

La dimension anormale s'écrit alors

$$\gamma_{ij} = -\frac{1}{2} g \frac{\partial z_{ij}^{(1)}}{\partial g} \qquad (3)$$

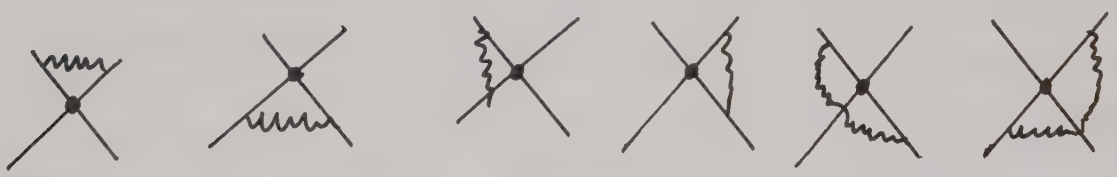
Il nous suffit donc d'extraire les pôles d'ordre 1.

Traitons en détail le cas des opérateurs

$$O_1 = (\bar{s}_i \gamma_\mu L u_i)(\bar{u}_j \gamma_\mu L d_j)$$

$$O_2 = (\bar{s}_i \gamma_\mu L u_j)(\bar{u}_j \gamma_\mu L d_i)$$

Les corrections radiatives à 1 boucle sont données par les diagrammes



1 1' 2 2' 3 3'

On obtient des opérateurs qui ont la structure de couleur

$(\bar{s}_k u_\ell)(\bar{u}_2 d_s) C^{k\ell 2s}$ avec plus le cas de O_1.

pour 1.1' $C^{k\ell 2s} = \delta_{2s} T_2 (\lambda^a)_{k\ell} = C \delta_{2s} \delta_{k\ell} \quad C = \frac{16}{3}$

pour 2 et 3 $C^{k\ell 2s} = c_1 \delta_{k\ell} \delta_{2s} + c_2 \delta_{ks} \delta_{2\ell}$

$c_1 = -\frac{2}{3} \quad c_2 = 2$

Le deuxième terme générant O_2.

Il faut ensuite calculer les pôles des diagrammes. Les intégrations se font, en utilisant la formule

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(k^2)^2}{(k^2 - C)^m} = \frac{i (-1)^{2-m}}{(16\pi^2)^{d/4}} \frac{\Gamma(2 + d/2)\,\Gamma(m - 2 - d/2)}{\Gamma(d/2)\,\Gamma(m)} (C)^{2-m+d/2}$$

et $\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ + partie finie.

D'autre part, nous avons le choix de la jauge. Choisissons la jauge de Landau. Le facteur $Z_\phi = 1$ à l'ordre g^2 dans cette jauge.

Les diagrammes 1,1', 3 et 3' donnent 0 dans cette jauge. (Les masses de quarks sont nulles, et ne donnent pas d''effet sur $Z^{(1)}$ à 1 boucle. Il n'est pas étonnant que (1) ne donne pas de contribution à γ car correspond à la renormalisation d'un courant conservée et donc qui n'a pas de dimension anormale.

D'autre part, (3) peut se ramener à (1) par transformation de Fierz.

(2) donne un terme de pôle $3Z_1$ avec

$$Z_1 = \frac{1}{4}\,\frac{g^2}{16\pi^2}\,\frac{2}{\varepsilon} + O(g^4)$$

On obtient ainsi la matrice γ (Chapitre III)

Remarque : Si les calculs sont effectués dans une autre jauge, par exemple, en jauge de Feynman ($\lambda = 1$), il convient de tenir compte de la renormalisation de la fonction d'onde :

Le contre terme associé à l'opérateur O, par exemple, multiplicativement renormalisable, s'écrit :

$$O(z_0 z_\varphi^{n/2} - 1) \qquad \text{si O a n pattes}$$

2) Dans le cas des opérateurs scalaires et tensoriels

La méthode est la même, si ce n'est une algèbre de Dirac plus complexe.

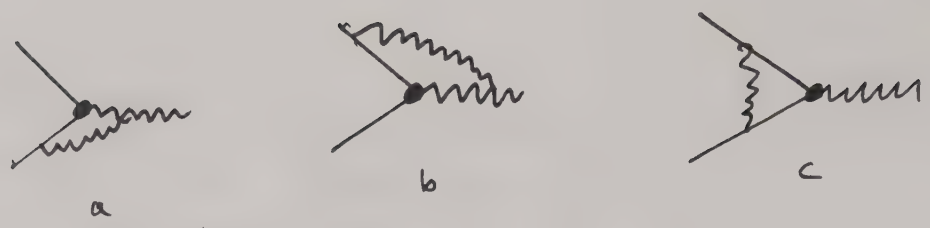
Les calculs ont été effectués en jauge de Landau.

Remarquons que le contre terme associé aux courants

$$\bar{s}_i R u_i \text{ est } -\frac{g^2}{2\pi^2} \times \frac{1}{\varepsilon}$$

nous retrouvons ainsi que le terme $m_c \bar{m}_s T\left[(\bar{s}_i R c_i)(x)(\bar{c}_j R d_j)(0)\right]$ n'a pas de dimension anormale $\left(\gamma_m = \frac{g^2}{2\pi^2}\right)$, ce que l'on avait affirmé étant donné que ce T-produit apparait dans une amplitude physique.

Pour l'opérateur $O_3 = \frac{m_c}{g}\,\bar{s}\,\sigma_{\mu\nu} R \lambda^a d\, F^{a\mu\nu}$ il faut calculer les diagrammes



où O_3 est représenté par

En jauge de Landau a et b sont nuls.

Il convient également de tenir compte de la renormalisation de la fonction d'onde $Z_3^{1/2}$, et de la renormalisation de $\frac{m_c}{g}$, ce qui revient à ajouter à la dimension anormale trouvée, un terme $\beta/g - \gamma_m$

Le Mixing sur O_3 se calcule par des diagrammes du type :

REFERENCES

1. I.M. Christenon, J.W. Cronin, V.L. Fitch et R. Turlay, Phys. Rev. Lett. 13, 138 (1964).
2. Pour une revue sur les mesures de violation de CP : K. Kleinknetcht Ann. Rev. Nucl. Sci. 26, 1 (1976).
3. L. Wolfestein, Phys. Rev. Lett. 13, 562(1964).
4. M. Kobayashi et T. Maskawa, Progr. Theor. Phys. 49, 652 (1973)
5. S.L. Glashow, J. Iliopoulos et L. Maiani, Phys. Rev. D2, 1285 (1970).
6. S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 31, 657 (1976).
7. C. Albright, J. Smith et SH H Tye, Phys. Rev. D21, 711 (1980). K. Shizuya and SH H Tye, Phys. Rev. D23, 1613 (1981).
8. E. Witten, Nucl. Phys. B122, 109 (1977).
9. D. Chang, Phys. Rev. D25 1318 (1982)
10. J.F. Donoghue et al., Phys. Rev. D25, 195 (1982).
11. S. Coleman et al. Phys. Rev. 117, 2239 (1969). J. Cronin Phys. Rev. 161, 1483(1967) et S. Coleman dans "Theory and Phenomenology in Particle Physics" Ecole d'été d'Erice 1968.
12. R.E. Shrock et S.B. Treiman, Phys. Rev. D19, 2148 (1979).
13. M.A. Shifmann, A.I. Vainshtein et V.J. Zakharov, Nucl. Phys. B120, 315 (1977).
14. M.K. Gaillard et al., Nucl. Phys. B109, 213 (1976).
15. F.J. Gilman et Mark B. Wise, Phys. Rev. D20 (1979) 2392 et Phys. Lett 93 B 129(1980).
16. A.I. Sanda , Phys. Rev. D23 2647 (1981)
17. M.B. Gavela et al. Phys. Lett. 109B 215 (1982).
18. John S. Hagelin, preprint Harvard, HUTP-81/A020
19. Stephen Barn et al. Phys. Rev. D20 2494 (1979).
20. H. Georgi et L. Glashow, Phys. Rev. Lett. 33, 451 (1974).
21. I. Antoniadis, C. Kounnas et C. Roiesnel, Nucl. Phys. B198, 317 (1982).
22. A.J. Buras et al., Nucl. Phys. B135, 66 (1978).

RESUME

Dans la première partie de cette thèse, nous étudions les conséquences phénoménologiques du modèle de Weinberg de violation spontanée de CP.

Les lagrangiens effectifs sont dérivés en tenant compte des effets de courte distance. Le rapport ε'/ε caractérisant la violation de CP dans les désintégrations $K \to 2\pi$ est calculé.

Les contributions dispersives sont évaluées et il est montré que toute une classe de modèles peuvent être compatibles avec les données expérimentales actuelles.

La contribution des termes purement $\Delta I = 1/2$ (Pingouins) est analysée phénomenologiquement.

Dans la dernière partie, nous calculons la durée de vie du Proton dans le cadre de SU(5), utilisant l'algèbre des courants.

Mots-clés : Violation de CP - Lagrangien effectif - dispersives (contribution)-Proton (désintégration).